論　文

トランザクション消滅を考慮した待ち行列系の最適配分法
－ファイナンス論的アプローチ－

正員　白 井 健 二　((株)情報工房)
非会員 天 野 佳 則　((株)京南エレクス)
正員　井 上 和 夫　(立命館大学)

The Finance Approach to the optimal routing in Queuing System with the transaction lost.

Kenji Shirai, Member (Johokobo. Inc.), Yoshinori Amano, Non-Member (Kyohnan Elecs,co.LTD), Kazuo Inoue, Member (Ritsumeikan University)

The paper addresses the problem of routing control of transaction in a parallel queuing system with transaction lost where customers must begin service within given deadlines. For a system of N parallel servers with probabilistic routing scheme, the optimal routing depends upon only the probabilistic characteristics in transaction lost dynamics, under the transaction loses in each route are modeled by Ito's stochastic differential equation.

キーワード：ファイナンス理論，ジャンププロセス，計数過程，伊藤型確率微分方程式，　最適制御

1.　まえがき

筆者等は，点過程及び計数過程を応用して，システム全体をバーチャルパイプラインと見なし，トランザクション消滅のあるシステムの定常解析を試み，ある条件のもとに定常分布の存在を提示した[(8)~(11)]。点過程とは，トランザクションそのものを点列と見なし，その点列の個数を計数過程として定義するものである。その時，消滅したトランザクションの論理的取り扱いとして，出力構造を持つ計数過程モデルとして定義している。文献(11)では，入出力及びトランザクション消滅は，それぞれ独立したマルコフ性を維持したポアソン過程を前提としている。文献(17)では，トランザクション消滅のある待ち行列系の最適制御問題を考察した。対象システムに対して流通過程を定義し，流通過程を通過するトランザクション数を最大にする様な最適制御の存在とその条件を提示した。文献(16)では，カスタマーへの需要供給を含めた待ち行列系に対しての最適制御を考察した。対象システムは，トランザクション消滅を考慮した N 個の M/M/1 型の待ち行列系である。筆者等は，文献(16)でファイナンス論的アプローチを導入している。システムの評価関数は，ある期の収益の最大化及び期における投資～消費効果まで含めたシステム財の最大化を基準として表している。システム財の最大化のためにジャンププロセスを導入している。ジャンププロセスの導入が，本システムにファイナンス理論[(12),(13),(15)]における最適ポートフォリオの考え方の導入を可能にした。

本研究の目的は，トランザクション消滅を考慮した N 個の並列 M/M/1 型の待ち行列系に対して，トランザクションの流通量を最大にするための最適配分を決定する事を研究対象としている。本研究の前提は，トランザクション消滅は，入力に依存する事である。筆者等は，これまでの研究では「トランザクション消滅は，入力とは独立した計数過程である。」と論じている。本研究でより自然な考え方に立ったといえる。本研究の課題を解決するために，ファイナンス理論の中で用いられている平均・分散モデルを活用している。入力トランザクションの平均・分散が既知の場合，ファイナンス論的アプローチにより最適配分係数を決定している。N 個の並列な待ち行列の出力側から上流過程に注目した場合，最初のゲートウェイで破棄されるトランザクションが発生する。さらに，N 個のルートでトランザクション消滅が発生する。つまり，出力側から入力側に注目した場合，各ルート上のトランザクションレートそのものの変動，上記のゲートウェイでの破棄，トランザクション消滅及び各ルート固有の問題で出力側に影響を受ける結果となる。前述した様に，各ルートでのトランザクション消滅及び損失は，システムパラメータと見なしている。筆者等は，各ルートを流通するトランザクションレートの変動を，ジャンププロセスを応用して動的モデルを定義している。この動的モデルの中で各ルートの変動は，入力トランザクションのロス確率及び獲得確率に依存している。さらに，各ルートの変動は，伊藤型確率微分方程式で規定されるものと仮定する。システムの評価関数としては，対象システムに流入するトランザクションが出力側へ最大限に送出される最適制御問題として取り扱っている。手法と

しては，最適制御の終端値問題へと帰着させている。

計数過程[1],[4],[7]を用いた過去の最適制御問題に関する研究は，確率過程をベースにした待ち行列システムの基本的定式化を目的として解析がなされている。さらに，最適制御問題に対して，その定式化とダイナミックプログラミングによる解析が成されている[1]。一方，製造業における在庫管理の最適化問題として，計数過程を用いて最適解を求めたものがある[2]。しかし，ファイナンス理論[12],[13]の考え方を待ち行列系に適用した研究は，比較的数少ないといえる。

本研究では，以上の事を踏まえた上でN個の並列M／M／1待ち行列系を考え，さらに入力トランザクションのロス確率及び獲得確率を定義している。この獲得確率の変動が伊藤型確率微分方程式に従うものとすれば，ある適当な評価汎関数のもとで最適配分係数は，獲得確率(ロス確率)の確率的性質にのみ依存する事を明らかにしている。

2．対象システム及び動的配分係数の決定について

<2･1> システム記述

図1は，ある待ち行列系において，システムのゲートに到着するトランザクションが一部ゲートでリジェクションされる事を考慮している。ゲートを通過したトランザクションはN個の並列$M/M/1$の待ち行列系に分配される。各トランザクションは，N個の並列ルートではトランザクション消滅が発生する。筆者等は，ゲートまでの入力トランザクションを"ポテンシャルインプット"[11]と，ゲートを通過したトランザクションを"アクチュアルインプット"[11]と言う事にする。図2は，図1のトランザクションをレートで表現したものである。$\phi_i(t)$は，ルートi番目におけるトランザクション配分係数である。本システムでの評価目的は，このポテンシャルインプットの獲得量が最大になる様に，各システムルートにおける配分係数$\phi_i(t)$を決定している。ある待ち行列系において，システムに到着するトランザクションは，時刻$\{\hat{T}_q, q=1,2,\cdots\}$で到着する。この時点列は，レート$\hat{\alpha}(t)(>0)$のポアソン点過程に従うものとする。また，リジェクトされるトランザクションは，時刻$\{T_r^*, r=1,2,\cdots\}$でシステム外にリジェクトされる。この時，その時点列は，レート$r(t)(>0)$のポアソン点過程に従うものとする。システムの出力トランザクションは，時刻$\{T_q, q=1,2,\cdots\}$で出力され，かつ，その時点列は，レート$\alpha(t)(>0)$のポアソン点過程に従うものとする。

ここで，$\{\hat{A}(t); t\geq 0\}$はポテンシャルインプットを表す計数過程(確率過程)とする時，$\hat{A}(t)$の計数過程は

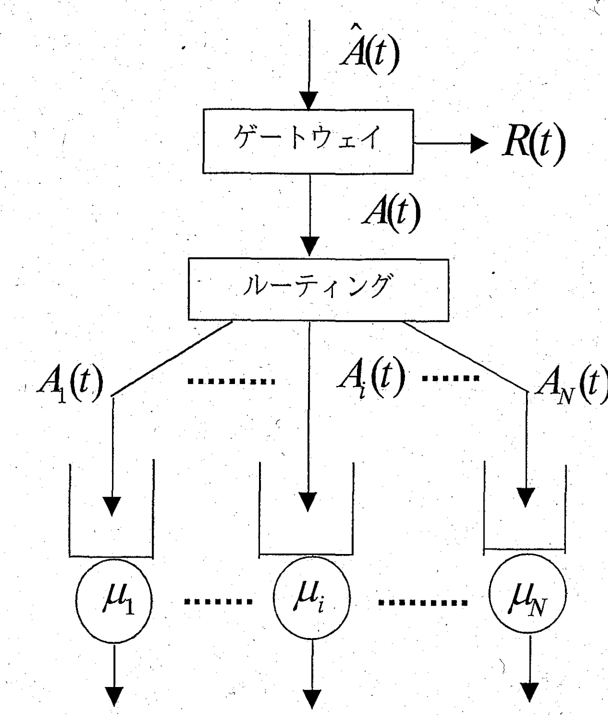

図1 システム概念図
Fig,1 System Configuration

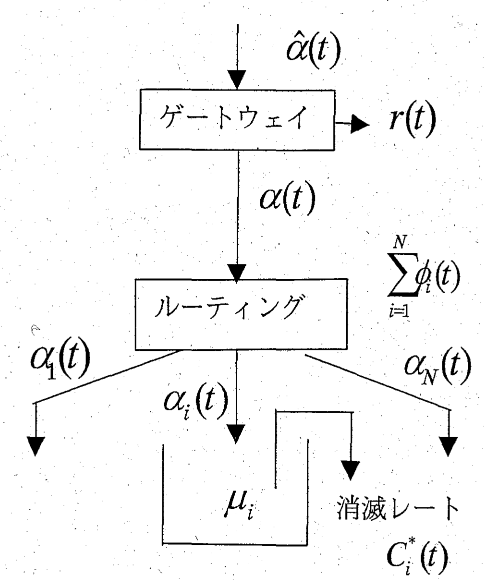

図2 システム等価図
Fig2. Equivalent System for Fig1

$$\hat{A}(t)=\sum_{q\geq 1}\mathbf{1}_{\{\hat{T}_q\leq t\}},\quad q=1,2,\cdots \tag{1}$$

また，アクチュアルインプット$A(t)$の計数過程は

$$A(t)=\sum_{q\geq 1}\mathbf{1}_{\{T_q\leq t\}},\quad q=1,2,\cdots \tag{2}$$

と表される。ただし，各ルートにおける入力は

$$A_i(t)=\phi_i(t)A(t) \tag{3}$$

$$但し,\ \sum_{i=1}^{N}\phi_i(t)=1,\ i=1,2,\cdots,N \tag{4}$$

と表される。リジェクトされるトランザクションの点過程は

$$\{T_r^*\}=\{T_1^*,T_2^*,T_3^*,\cdots\cdots\cdots\}\in T^* \tag{5}$$

である事から，リジェクトされるトランザクションの計数過程は,

$$R(t)=\sum_{r\geq 1}\mathbf{1}_{\{T_r^*\leq t\}},\quad r=1,2,\cdots \tag{6}$$

と書ける。消滅トランザクションの点過程は

$$\{C_r\}=\{C_1,C_2,C_3,\cdots\cdots\}\in C \tag{7}$$

である事から，消滅トランザクションの計数過程は

$$C(t)=\sum_{r\geq 1}\mathbf{1}_{\{C_r\leq t\}},\quad r=1,2,\cdots \tag{8}$$

ここで，上記指示関数$\mathbf{1}_{\{\bullet\}}$は，集合$\{\}$上で1，それ以外では0の値をとる指示関数である。例えば，$\sum_{q\geq 1}\mathbf{1}_{\{T_q\leq t\}}$は，時刻$\{0<T_q<t\}$で$\{T_q\}$の個数をカウントしている。本システムのモデル式は,

$$A(t)=\hat{A}(t)-R(t)-C(t) \tag{9}$$

である。ここに，$R(t)$は入力側で制御されるリジェクション。$C(t)$は，各ルートにおけるトランザクションの消滅を表している。

この解析モデルは，ポテンシャルインプット，アクチュアルアウトプットおよびリジェクトされるトランザクションをそれぞれ独立した確率過程として待ち行列を表現している。連続時間下でのトランザクションの動作をより忠実に表現出来るところに，計数過程の利点がある。ここで，独立性の仮定については，文献(3)で述べられている様に局へのフレーム到着とサービス開始時刻が独立した確率過程としている。トークンリング型ネットワークにおいてもトークンそのものが消失した場合，局のフレームが滞留する事になる。この事を考え合わせても本システムにおいて，入出力過程とリジェクトされるトランザクションの確率過程を，それぞれ独立したポアソン過程と仮定しても本質的な差異はないと思われる。

ここで，各ルートにおける消滅トランザクションのレートを$C_i^*(t)$と置くと，この$C_i^*(t)$は各ルートにおける待ち行列のパラメータ(例えば，dead time τ_i，サービスレート$\mu_i\cdots$)に依存するものとし，その消滅確率(ロス確率)を$P_i(\varphi_i(t))$と表す。但し，$\varphi_i\equiv\{\tau_i,\mu_i,\cdots\},i=1,2,\cdots,N$と置く。この時，$P_i[\varphi_i(t)]$に対応して獲得確率を$f_i[\varphi_i(t)]$と表し,

$$f_i[\varphi_i(t)]=1-P_i[\varphi_i(t)] \tag{10}$$

を定義する。但し，$i=1,2,\cdots\cdots,N$である。

ここで，アクチュアル入力過程のレート$\alpha(t)$の変動をとらえる事により，その動的モデルを

$$d\alpha(t)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(t)\alpha(t^-)df_i[\varphi_i(t)] \tag{11}$$

と表す。但し，$\alpha(t^-)=\lim_{s\uparrow t}\alpha(s)$である。

この時，$f_i[\varphi_i(t)]$は，伊藤型確率微分方程式に従い変動するものとすれば,

$$\begin{aligned}df_i[\varphi_i]&=a_i(t)f_i[\varphi_i]dt\\&\quad+b_i(t)f_i[\varphi_i]dZ_i(t)\end{aligned} \tag{12}$$

と表す事が出来る。但し，$i=1,2,\cdots\cdots,N$である。**[付録参照]**

ここで，(12)式の$Z_i(t)$は，独立増分$dZ_i(t)$を持つウィナー過程であり，平均は零，分散はdtを持つものとする。

以上の様に，各ルートに入力されるトランザクションの獲得レートの変動を表すモデルが(9)～(12)式の様に表された。

<2•2> 動的配分係数の決定

ここでは，(9)～(12)式のモデルに対して，最適制御問題における終端値制御問題として，制御区間$t=(0,T]$にお

ける評価関数を$J[\alpha(T)]$と表す。即ち，制御区間の終端時刻におけるアクチュアル入力レートの最大を目的とした汎関数である。それ故，この評価関数に対する任意の時刻$t<T$に対して，$V(w,t)$を

$$V(w,t)=\underset{\substack{\phi_i(\tau)\\ t\le\tau\le T}}{Sup}\,E\left[J\{\alpha(T)|\alpha(t)=w\}\right] \quad (13)$$

と定義する。但し，$E[\cdot]$は期待値演算を表す。

この時，次の命題を得る。

＜命題＞

(9)～(12)式により表されるシステムにおいて，制御区間の終端値でアクチュアル入力レートを最大にする制御問題に対して，アクチュアル入力レートの最適配分(Routing)係数は，各分岐ルートにおけるトランザクション獲得確率の特性にのみ依存する。但し，(13)式は，時間項が独立した関数と仮定する。つまり，変数分離法を用いて，解析解が求められる事を前提としている。

〔証明〕

今，(13)式で定義された評価関数に対して最適化方程式は

$$Sup\{\pounds_w V(w,t)\}=0 \quad (14)$$

但し，

$$\pounds_w V(w,t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\left[\sum_{i=1}^{N}\alpha(t^-)\phi_i(t)a_i(t)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha(t^-)\phi_i(t)b_i(t)\right]^2 \quad (15)$$

である[13]。この時，

$$J[\alpha(T)]=V(w,T),\ ^{\forall}\sum_{i=1}^{N}\phi_i(t)=1 \quad (16)$$

となる。さらに，(14)～(16)の拘束のもとでラグランジェ関数は

$$L[\phi(t),\lambda]=\pounds_w V(w,t)+\lambda\left[1-\sum_{i=1}^{N}\phi_i(t)\right] \quad (17)$$

と定義できる。それ故，(16)式より最適性の条件は

$$\frac{\partial L}{\partial\phi_i}=0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=1-\sum_{i=1}^{N}\phi_i(t)=0 \quad (19)$$

が得られる。ここで，(18)式によれば

$$\frac{\partial L}{\partial\phi_i}=\frac{\partial V}{\partial\alpha}\alpha(t^-)a_i(t)+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\alpha^2(t^-)b_i^2(t)\phi_i(t)-\lambda=0 \quad (20)$$

が得られる。(20)式より$\phi_i(t)$を求めると

$$\phi_i(t)=\frac{\lambda-V_\alpha\alpha(t^-)a_i(t)}{V_{\alpha\alpha}\alpha^2(t^-)b_i^2(t)}=\frac{\lambda b_i^{-2}(t)-V_\alpha\alpha(t^-)b_i^{-2}(t)a_i(t)}{V_{\alpha\alpha}\alpha^2(t^-)} \quad (21)$$

が得られる。但し，(21)式において

$$V_\alpha=\partial V/\partial\alpha,\ V_{\alpha\alpha}=\partial^2 V/\partial\alpha^2$$

と置いた。ここで，(21)式の両辺において$i=1,\cdots,N$迄の和をとり，(19)式を満足する様にλを求めると

$$\lambda=\frac{V_{\alpha\alpha}\alpha^2(t^-)}{\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)}+\frac{V_\alpha\alpha(t^-)\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)a_i(t)}{\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)} \quad (22)$$

となる。この時，(21)，(22)式より最適な$\phi_i(t)$は

$$\phi_i^*(t)=\frac{b_i^{-2}(t)}{\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)}+\frac{V_\alpha}{V_{\alpha\alpha}\alpha(t^-)}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)a_i(t)}{b_i^{-2}(t)\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)}-\frac{V_\alpha}{V_{\alpha\alpha}\alpha(t^-)}\cdot\frac{a_i(t)}{b_i^{-2}(t)} \quad (23)$$

と求まる。ここで，$V(w,t)$は，(23)式を(14)式に代入すると

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V_\alpha\sum_{i=1}^{N}\alpha(t^-)\phi_i^*(t)a_i(t)+\frac{1}{2}V_{\alpha\alpha}\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha(t^-)\phi_i^*(t)b_i(t)\right]^2=0 \quad (24)$$

を満足する。この時，(23)式において$\phi_i(t)$が$V(\alpha,t)$に依存しない様に決定するものとする。

先ず，命題の仮定より，$V(\alpha,t)$は，変数分離法を用いれば，

$$V(\alpha,t)=\hat{V}(\alpha)G(t),\ {}^{\forall}G(T)=1 \tag{25}$$

と書ける。(23)式において，V_αと$V_{\alpha\alpha}$との比に関して

$$\frac{V_\alpha}{V_{\alpha\alpha}\alpha(t^-)}=a \tag{26}$$

と置くと簡単な計算により

$$\hat{V}(\alpha)=C_0\frac{1}{\zeta}\alpha^{\zeta} \tag{27}$$

但し，$0<\zeta<1$が得られる。

それ故，(23)，(27)式より

$$\phi_i^*(t)=\frac{b_i^{-2}(t)}{\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)}+\frac{1}{\zeta-1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)a_i(t)}{b_i^2(t)\sum_{i=1}^{N}b_i^{-2}(t)}-\frac{1}{\zeta-1}\cdot\frac{2a_i(t)}{b_i^2(t)} \tag{28}$$

が得られる。

〔証明終り〕

以上の様に，最適ルーティング係数ϕ_i^*は，(27)式の様に$\hat{V}(\alpha)$が選ばれるものとすると，獲得レートの変動を規定する伊藤型確率微分方程式の係数にのみ依存する事が確認出来た。

即ち，評価関数が変数分離により時間項が独立の関数として扱え，適当な関数を選ぶと最適ルーティング係数を決定することができる。即ち，獲得レート，獲得確率の確率的性質にのみ依存する事が確認できた。以下では定常問題にこの考え方を応用する。ここでの最適ルーティング係数に関して筆者等は，既にファイナンス理論を応用する事により最大利益問題に対して定常問題を考えた時，得られた配分係数が最適であるとの結果を得ている(16)。

それ故，本研究では動的モデルに対して，トランザクション流通量を最大にする評価関数に対して最適な動的配分係数を求めた。

<2•3> 定常モデルに対する配分係数の決定

ここでは，図 1. の様なシステムに対して，定常的な最適配分係数の決定について考察する。定常状態では，前記命題で仮定した評価関数の変数分離法は適用していない。つまり評価関数は，$V(\alpha,t)=\hat{V}(\alpha)$となる。即ち，この問題は，入力レートの増大に対して獲得レートを最大にする様な分岐ルートの配分係数を決定する問題と等価である。

今，$t=k$におけるポテンシャル入力レートを$\hat{\alpha}_k$と置く。この時，ポテンシャル入力レートが増大するものとすれば，$t>k$における増分は

$$\sum_{i=1}^{N}\phi_i[\hat{\alpha}_k-r]f_i(\varphi_i) \tag{29}$$

と表される。ここでrは，リジェクトされたトランザクションのレートを表す。簡単のために$r=0$と置く事にする。

この時，(29)式に対する評価関数として，獲得レートを最大にする問題を考え，次式の様に定義する。

$$\begin{aligned}V(\theta)&=\underset{\phi_i\in\theta}{Max}\,E\left[\sum_{i=1}^{N}\hat{f}_i(\varphi_i)\right]\\&=\underset{\phi_i\in\theta}{Max}\,E\left[\sum_{i=1}^{N}\phi_i\alpha_k f_i(\varphi_i)\right]\end{aligned} \tag{30}$$

と置と，(30)式は

$$\begin{aligned}V(\theta)&=\underset{\phi_i\in\theta}{Max}\,E\left[\sum_{i=1}^{N}\phi_i f_i(\varphi_i)\alpha_k\right]\\&\equiv\underset{\phi_i\in\theta}{Max}\,E[\mathbf{f}(\theta)\alpha]\end{aligned} \tag{31}$$

と変形出来る。但し，

$$\mathrm{f}(\theta)\equiv\{f_i(\varphi_i)\phi_i;i=1,2,\cdots\cdots,N\}$$

である。この時，獲得確率ベクトル$\mathbf{f}(\theta)$の期待値と分散を次の様に表す。

$$\begin{aligned}E[\mathbf{f}(\theta)]&=E\left[\sum_{i=1}^{N}f_i(\varphi_i)\phi_i\right]\\&=\sum_{i=1}^{N}g_i(\varphi_i)\phi_i\\&\equiv\mathbf{K}\end{aligned} \tag{32}$$

即ち，ベクトル$\mathbf{K}$は，各ルートにおけるアクチュアル入

カトランザクションのレートα_iに対する獲得確率の平均値

$$\kappa \equiv \{g_1(\varphi_1)\phi_1, \cdots\cdots, g_N(\varphi_N)\phi_N\} = \left\{\overline{f_1(\varphi_1)}\phi_1, \overline{f_2(\varphi_2)}\phi_2, \cdots\cdots, \overline{f_N(\varphi_N)}\phi_N\right\} \tag{33}$$

を表している。また，分散を

$$Var[\mathsf{f}(\theta)] = \sum_{i,j=1}^{N} \phi_i \phi_j \sigma_{ij} \equiv \mathbf{\Sigma}^2 \tag{34}$$

と定義すれば，ベクトル$\mathbf{\Sigma}$は

$$\Sigma \equiv [Var\{f_1(\varphi_1)\}, Var\{f_2(\varphi_2)\}, \cdots\cdots, Var\{f_N(\varphi_N)\}] = \left\{\sigma_{f_{1_j}}, \sigma_{f_{2_j}}, \cdots\cdots, \sigma_{f_{N_j}}\right\}, \ j = 1,2,\cdots\cdots,N \tag{35}$$

と表される。

この時，$\mathsf{f}(\phi)$に関する，ある汎関数を$U[\mathsf{f}(\phi)]$と定義し，(33)，(35)式を用いると，このシステムに対する平均•分散モデルとして(31)式を考慮すると

$$\hat{V}(\kappa, \Sigma^2) = E[U\{\mathsf{f}(\phi)\}] \tag{36}$$

と表すと，(36)式に対するラグランジェ関数は

$$\pounds[\phi, \lambda] = \hat{V}(\kappa, \Sigma^2) + \lambda\left[1 - \sum_{i=1}^{N} \phi_i\right] \tag{37}$$

と表せる。ここで，最適性の条件は

$$\frac{\partial \pounds}{\partial \phi_i} = \hat{V}_\kappa \cdot \kappa_\phi + \hat{V}_{\mathbf{\Sigma}^2} \cdot \Sigma^2{}_\phi + \frac{\partial}{\partial \phi_i}\left[\lambda\left\{1 - \sum_{i=1}^{N}\phi_i\right\}\right] = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial \pounds}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{N} \phi_i = 0 \tag{39}$$

となる。それ故，(33)，(34)式を用いると(38)式は

$$\hat{V}_\kappa \cdot g_i(\overline{\varphi}_i) + 2\hat{V}_{\mathbf{\Sigma}^2}\sigma_{ij}\phi_i + \frac{\partial}{\partial \phi_i}\left[\lambda\left\{1 - \sum_{i=1}^{N}\phi_i\right\}\right] = 0 \tag{40}$$

となる。但し，以上の式において$\hat{V}(\cdot)$は，添え字$(\cdot)$に関する$\hat{V}(\cdot)$の偏微分を表している。

この時，(36)式を用いて，$U[\mathsf{f}(\phi)]$を

$$U[\mathsf{f}(\phi)] = -\exp[-\eta \mathsf{f}], \quad {}^\forall \eta > 0 \tag{41}$$

と選ぶ事にする。これは，$\mathsf{f}(\theta)$に対して単調増加でかつ，凹関数であり，題意に沿っているからである。さらに，$\mathsf{f}(\phi)$は正規分布に従うものと仮定すると簡単な確率積分の計算により，$\hat{V}(\kappa, \mathbf{\Sigma}^2)$は

$$\hat{V}(\kappa, \mathbf{\Sigma}^2) = E[U(\mathsf{f})] = \exp\left[-\eta \kappa + \frac{1}{2}\eta^2 \mathbf{\Sigma}^2\right] \tag{42}$$

が得られる。それ故，(40)式より

$$\hat{V}_\kappa \cdot g_i(\varphi_i) + 2\hat{V}_{\mathbf{\Sigma}^2}\sigma_{ii}\phi_i - \lambda = 0, \quad i = 1,2,\cdots\cdots,N \tag{43}$$

が得られる。但し，$\sigma_{ij} = 0 \ (i \neq j)$と置いた。

これよりϕ_i^*は，(43)式を用いると

$$\phi_i^* = \frac{\lambda \sigma_{ii}^{-1} - \hat{V}_\kappa f_i(\varphi_i)\sigma_{ii}^{-1}}{2\hat{V}_{\Sigma^2}} \tag{44}$$

が得られる。ここで，(44)式の両辺をiについて和をとり，(39)式の条件を満足すると，λに関して

$$\lambda = \frac{2\hat{V}_{\Sigma^2}}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii}^{-1}} + \frac{\hat{V}_\kappa \sum_{i=1}^{N} f_i(\varphi_i)\sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii}^{-1}} \tag{45}$$

が得られる。但し，$\sigma_{ij} = 0 \ (i \neq j)$と置いた。

さらに，(45)式を(44)式に代入すると

$$\phi_i^* = \frac{\sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii}^{-1}} - \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_\kappa}{\hat{V}_{\Sigma^2}} \cdot (\sigma_{ii}^{-1})\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N} g_i(\varphi_i)\sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii}^{-1}} - g_i(\varphi_i)\right\}$$
$$= \frac{\sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii}^{-1}}\left[1 - \frac{1}{\eta}\left\{\sum_{i=1}^{N} g_i(\varphi_i)\sigma_{ii}^{-1} - g_i(\varphi_i)\sum_{i=1}^{N}\sigma_{ii}^{-1}\right\}\right], \quad i = 1,2,\cdots\cdots,N \tag{46}$$

但し，$\dfrac{\hat{V}_\kappa}{2\hat{V}_{\mathbf{\Sigma}^2}} = \dfrac{1}{\eta}$と置いた。

この時，仮にN個のルートの統計的性質が同じなら，(46)式より

$$\phi_i^* = \frac{1}{N} - \frac{1}{2}\frac{\hat{V}_\kappa}{\hat{V}_{\Sigma^2}} \cdot (\sigma_{ii}^{-1})\left\{\frac{Nf_i(\varphi_i)\sigma_{ii}^{-1}}{N\sigma_{ii}^{-1}} - f_i(\varphi_i)\right\}$$
$$= \frac{1}{N} \tag{47}$$

となり，入力レートは各ルートに等分配される。
以上の様に，平均•分散モデルによれば，最適配分係数は，(46)式の様に求まる。
次に，各ルートにおけるレートαに対する定常ロス確率を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} P &= P\{q(\alpha) < \tau\} \\ &= 1 - \int_0^\infty \int_0^t h_q(q) h_\tau(t)\, dq\, dt \\ &= 1 - \int_0^\infty H_q(t) h_\tau(t)\, dt \end{aligned} \tag{48}$$

ここで，$H_q(t)$は，Queuing Time の分布関数，$h_\tau(t)$は Dead Line τ の確率密度関数であり，指数分布を持つものとする。いま，αはポアソン分布のレートであり，μは分岐ルートのサービスレートであり，指数分布とする。さらに，γは Dead-Line のレートとして表すと，$H_q(t)$は

$$H_q(t) = 1 - (\alpha - C^* / \mu) \exp[-(\mu - \alpha + C^*)t] \tag{49}$$

又，$h_\tau(t)$は

$$h_\tau(t) = \gamma \exp(-\gamma t) \tag{50}$$

と表せる。
それ故，(49)，(50)式を(48)式に代入すると

$$\begin{aligned} P &= 1 - \int_0^\infty \{1 - (\alpha - C^* / \mu) \exp[-(\mu - \alpha + C^*)t] \\ &\qquad \times \gamma \exp(-\gamma t)\} dt \\ &= (\alpha - C^*)\gamma \Big/ \{\mu(\mu - \alpha + C^* + \gamma)\},\ \alpha < \mu \end{aligned} \tag{51}$$

が得られる。但し，以上の展開の中で添え字(i)は省略している。
故に，獲得確率は(10)式を用いると

$$\begin{aligned} f_i(\varphi_i) &= \{1 - P_i(\varphi_i)\} \\ &= \left[1 - (\alpha_i - C_i^*)\gamma \Big/ \{\mu_i(\mu_i - \alpha_i + C_i^* + \gamma)\}\right] \end{aligned} \tag{52}$$

が得られる。
即ち，(52)式は，各ルートの獲得確率を表している。それ故，$t = k$における分岐ルートの平均値を$\overline{\alpha}_i^k$と置くと，(52)式に従えば，$\overline{f_i(\varphi_i^k)} = f_i(\overline{\varphi}_i^k)$と置く事により

$$f_i(\overline{\varphi}_i^k) = \left[1 - (\overline{\alpha}_i^k - C_i^*)\gamma \Big/ \{\mu_i(\mu_i - \alpha_i + C_i^* + \gamma)\}\right] \tag{53}$$

として，$t = k$における$f_i(\alpha_i)$の平均値が計算できる。
これより，(46)式を用いれば，

$$\phi_i^* = \frac{\langle\sigma_{ii}^{-1}\rangle_k}{\sum_{i=1}^N \langle\sigma_{ii}^{-1}\rangle_k} \left[1 - \frac{1}{\eta}\left\{\sum_{i=1}^N g_i(\varphi_i)\langle\sigma_{ii}^{-1}\rangle_k - g_i(\varphi_i)\sum_{i=1}^N \langle\sigma_{ii}^{-1}\rangle_k\right\}\right]$$
$$i = 1, 2, \cdots\cdots, N \tag{54}$$

の様に最適配分係数が求められる。但し，$\langle\sigma_{ii}^{-1}\rangle_k$は$t = k$における$g_i(\varphi_i)$の分散を表している。
以上の様に，定常モデルとして平均•分散モデルを考えた時，最適配分係数は図 2. のルーチンにより求める事が出来る。

3. 数値計算例

図 3 は，2 経路時の入力トランザクションαに対する配分係数である。

（例１）２経路の例

$\mu_1=20$, $\mu_2=10$
$C_1/\alpha_1=0.1$, $C_2/\alpha_2=0.2$
ϕ_1初期値=0.5, ϕ_2初期値=0.5
$\eta=0.00001$, $\gamma=0.001$

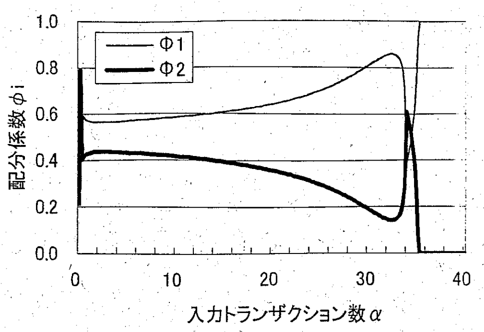

図3．２経路時の配分係数

Fig.3 The transaction portfolio parameter in case of two routes

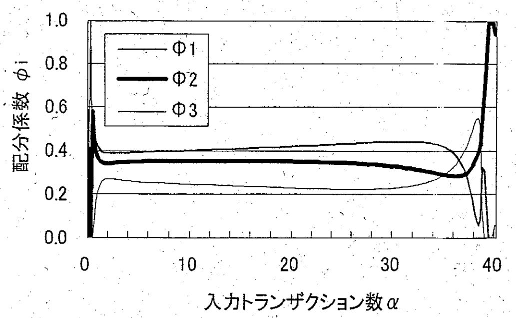

図5．３経路時の配分係数

Fig.5 The transaction portfolio parameter in case of three routes

図 4 は，2 経路時の入力トランザクションαに対する獲得確率及びシステムからの出力トランザクション数である。図 3 及び図 4 より獲得確率に対応した配分係数に変化している。決定された配分係数により，出力トランザクションが増加している事が確認できる。

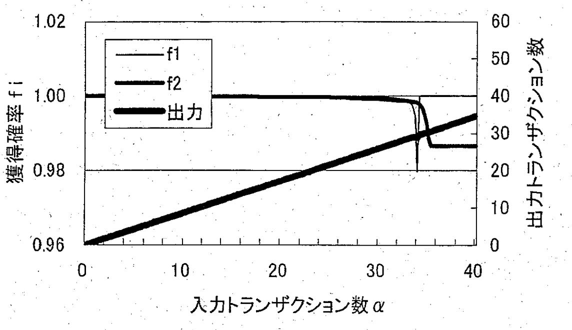

図4．２経路時の獲得確率及び出力トランザクション数

Fig.4 The probability customer is good and the number of output transaction

図 5 は，3 経路時の入力トランザクションαに対する配分係数である。

（例２）３経路の例

μ_1=20, μ_2=10, μ_3=5

C_1/α_1=0.05, C_2/α_2=0.1, C_3/α_3=0.2

ϕ_1初期値=0.333333333

ϕ_2初期値=0.333333333

ϕ_3初期値=0.333333334

η=0.000001, γ=0.0001

図 6 は，3 経路時の入力トランザクションαに対する獲得確率及びシステムからの出力トランザクション数である。図 5 及び図 6 より獲得確率に対応した配分係数に変化している。決定された配分係数により，出力トランザクションが増加している事が確認できる。

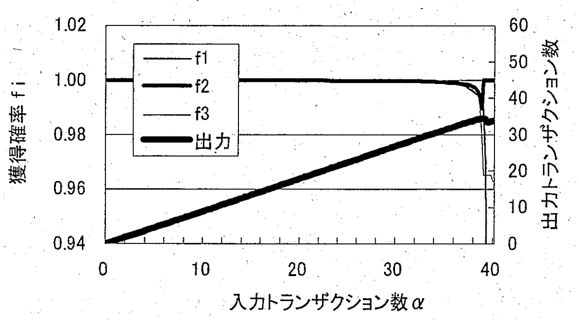

図6．３経路時の獲得確率及び出力トランザクション数

Fig.6 The probability customer is good and the number of output transaction

4. むすび

本研究は，N 個の M／M／1 待ち行列系が並列に存在するシステムに対して，各ルートのトランザクション消滅および各ルート固有の問題によるトランザクション損失をロス確率と定義する事により考察した。更に，これよりトランザクション獲得確率及びそのレートを定義し，獲得レートの最大問題を定式化し，あるコスト関数のもとで各分岐レートの動的配分係数を決定した結果，配分係数の最適値は，獲得レートの確率的性質にのみ依存する事が判った。その結果，最適配分係数は評価関数に依存しない様に(評価関数の時間項に関する独立を仮定すれば)評価関数の形を選べば，Explicit な形で求められた。

次に，同様の問題に対して，定常最適問題を定式化し

た結果，獲得確率の平均及び分散をパラメータとして持つ最適配分係数の Explicit な解を求めた。

最後に，数値計算をした結果，本研究により求められた最適配分係数の有用性を確かめた。

また，本研究を進めるにあたり，貴重なご意見を頂いた東京電機大学理工学部情報科学科町原文明教授に感謝致します。
(平成10年11月19受付，平成11年10月29再受付)

【付録1】

一般に，消滅確率(ロス確率)が

$$P\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right] = 1-\int_0^t H_q(t)h_\tau(t)dt \tag{1-1}$$

と表されるものとすると，獲得確率は

$$f\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right] = \int_0^t H_q(t)h_\tau(t)dt \tag{1-2}$$

と表せる。ここで，$H_q(t)$ は，Queuing Time の分布関数，$h_\tau(t)$ は，dead time の確率密度関数である。$\alpha(t^-)$ は，$t=t^-$ 時の $\alpha(t)$ の値，μ は分岐ルートのサービスレート，γ は，dead time のレートを表す。 ここで，(1-2)式を一般に

$$f\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right] = \int_0^t \Phi\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right]dt \tag{1-3}$$

と表す時，各種パラメータの確率変動による確率積分を確率過程 $f_s\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right]$ に対して

$$\begin{aligned} f_s\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right] - f_s\left[\mu_0,\nu_0,\alpha(t^-),0\right] &= \int_\tau^t \Phi\left[\mu,\gamma,\alpha(\tau^-),\tau\right]dZ(\tau) \\ &= \int_\tau^t \Phi\left[\mu,\gamma,\alpha(\tau^-),\tau\right]d\tau + \int_\tau^t b(\tau)dZ(\tau) \end{aligned} \tag{1-4}$$

と表す時，確率過程 $f_s\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right]$ は

$$df_s\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right] = a\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right]dt + b(t)dZ(t) \tag{1-5}$$

の様な確率微分方程式で表す事が出来るものとする。但し，$Z(t)$ はウィナー過程である。

ここで，作用素の $a[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t]$ に関しては，

【Ⅰ】:

$$\begin{aligned} &\left|a\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right] - a\left[\mu',\gamma',\alpha(t^-),t\right]\right| \\ &\le K\left\|\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-)\right] - \left[\mu',\gamma',\alpha(t^-)\right]\right\| \end{aligned} \tag{1-6}$$

【Ⅱ】:

$$\left|a\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right]\right|^2 \le K^2\left(1+\left\|\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-)\right]\right\|^2\right) \tag{1-7}$$

但し，K は定数である。

が成立するものとする。以上の様な仮定のもとで(1-5)式は，伊藤型確率微分方程式となる。

さらに，(11)式の動的モデル

$$d\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t)\alpha(t^-)df_{(s)i}\left[\mu,\gamma,\alpha(t^-),t\right] \tag{1-8}$$

において原式は

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t)\alpha(t^-)f_{(s)i}\left[\bullet\right] \tag{1-9}$$

と表される。

この時，$\alpha(t)$ はポアソン過程のレートであるから F_t^N を $\left\{A(t)\middle|0\le\tau\le t\right\}$ により生成された $\sigma-$ 加法族とする。この時，$\left\{A(t)\right\}$ は，F_t^N に適合する確率過程であり

$$M(t) = A(t) - \alpha(t^-)\int_0^t f_{(s)}\left[\bullet\right]d\tau \tag{1-10}$$

によりマルチンゲールを定義する。

ここで，$f_{(s)}\left[\bullet\right]$ は，(1-5)式の解過程である。さらに，$\left\{A(t)\right\}$ はポアソン過程であるから

$$\begin{aligned} E\left(A(t)-A(\tau)\middle|F_t^N\right) &= E\left(A(t)-A(\tau)\right) \\ &= \int_\tau^t \alpha(\tau^-)f\left[\bullet\right]d\tau \end{aligned} \tag{1-11}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} E\left(M(t)\middle|F_t^N\right) &= E\left(A(t)-A(\tau)+A(\tau)\middle|F_t^N\right) \\ &\quad -\int_0^t \alpha(\tau^-)f\left[\bullet\right]d\tau \\ &= A(\tau) + \int_s^t \alpha(\tau^-)f\left[\bullet\right]d\tau \\ &\quad -\int_0^t \alpha(t^-)f\left[\bullet\right]d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A(\tau) - \int_0^{\tau} \alpha(\tau^-) f[\bullet] d\tau \\
&= A(\tau) - \alpha(\tau^-) \int_0^{\tau} f[\bullet] d\tau
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}12)
$$

が成り立つ。この事は，(1-5)式の伊藤型確率微分方程式の解過程は連続である事から判る。

以上の様に(1-12)式によれば，$\{M(t)\}$はF_t^Nに適合したマルチンゲールである事が判る。即ち，(1-9)式の両辺はポアソン過程のレートを表している事になる。

【付録 2】

本論において(50)，(54)式は，各ルートの獲得確率ベクトルの共分散$\sigma_{ij}(i \neq j)$を無視したが，これを考慮すると先ず(45)式は

$$
\Phi^* = \frac{1}{\eta}[\Sigma]^{-1} \cdot \{[\mathsf{F}(\boldsymbol{a})] - [\mathsf{F}_0(\boldsymbol{a}_0)]\} \qquad (\mathrm{A})
$$

と表せる。但し，各ベクトルは

$$
\Phi^* = col\{\phi_1^*, \phi_2^*, \cdots\cdots, \phi_N^*\}
$$

$$
[\Sigma] = \begin{bmatrix}
\sigma_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{1N} \\
\vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
\sigma_{N1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{NN}
\end{bmatrix}
$$

$$
[\mathsf{F}(\boldsymbol{a})] \equiv col\{f_1(\varphi_1), f_2(\varphi_2), \cdots\cdots\cdots, f_N(\varphi_N)\}
$$

$$
[\mathsf{F}_0(\boldsymbol{a}_0)] \equiv col\{f_0(\varphi_0), f_0(\varphi_0), \cdots\cdots\cdots, f_0(\varphi_0)\}
$$

次に，(54)式は，

$$
\Phi^* = \frac{[\Sigma]^{-1}}{\det[\Sigma]^{-1}} - \frac{1}{\eta}[\Sigma]^{-1}\left\{\frac{[\mathsf{F}(\boldsymbol{a})] \cdot [\Sigma]^{-1}}{\det[\Sigma]^{-1}} - [\mathsf{F}(\boldsymbol{a})]\right\}
$$

と表される。但し，$\det[\Sigma]^{-1}$はマトリックス$[\Sigma]^{-1}$のマトリックス演算を表している。

文　　献

(1)Bremaud P: "Point Process and Queues Martingale Dynamics" pp83-121, Springer-Verlag New York Inc.(1981)。

(2)LODE LI : "A Stochastic Theory of The Firm" Mathematics of operations research,Vol13, No3, August 1988。

(3)箕輪弘之：「トークンリング型ネットワークのジャンプタイプ確率微分方程式を用いたモデル化」電子情報通信学会論文誌, B-1, Vol.J78-B-1, No.7 pp272-PP278, 1995年7月

(4)宮沢政清：「確率と確率課程」p90, 近代科学者(1993)

(5)A.SEGALL and T.KAILATH "The Modeling of Randomly B. Modulated Jump Process ",IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-21, NO.2, pp.135-143, MARCH 1975

(6)HONG CHEN and DAVID D. YAO "Optimal Intensity Control of a Queuing System with State-Dependent Capacity Limit", IEEE Transactions Automatic control,vol.35,NO.4,pp459- pp464,APRIL,1990

(7)川島幸之助・町原文明・高橋敬隆・斎藤 洋：「通信トラフィック理論の基礎とマルチメディア通信網」p97, 電子情報通信学会, 1995年11月

(8)白井・天野・井上：「衝突を考慮したC／S型ネットワークのジャンプ型確率微分方程式を用いたモデル化」９６年１１月電気関係学会関西支部連合大会

(9)白井・天野・井上：「フレーム衝突を含む一般化C／S型ネットワークのモデル化および定常分布」９７年３月, 信学春季全大

(10)白井・天野・井上：「C/S 型ネットワークシステム最適評価関数について」1997年9月, 信学秋季全大

(11)白井・天野・井上：「トランザクション消滅のあるシステムの定常解析」1998 年 10 月, 電気学会論文誌 Vol.118-C。

(12)森村英典・木島正明：「ファイナンスのための確率過程」pp117〜pp140, 日科技連, 1995年4月

(13)沢木勝茂：「ファイナンス数理」pp87〜pp143, 朝倉書店, 1994年12月

(14)M.H.KALLMES and C.G.CASSANDRAS "Two Approaches to Optimal Routing and Admission Control in Systems with Real-Time Traffic", Journal of optimization and application: Vol.84,No.2,pp311-338, February 1995

(15)宮武信春：「ファイナンス理論のなかの最適制御則」計測と制御, Vol.30,No.7 pp616-pp622,1991年7月

(16)白井・天野・井上：「ファイナンス理論と待ち行列系最適制御の融合」1998年2月, 電気学会論文誌投稿中。

(17)白井・天野・井上：「待ち行列系の最適制御」1998年2月, 電気学会論文誌投稿中。

白井 健二 (正員)

1949年8月31日生。昭50年立命館大学大学院修士課程了。確率モデルおよび最適制御に関する研究に従事。現在，(株)情報工房代表取締役社長。計測自動制御学会，電子情報通信学会，日本航空宇宙学会各会員。

天野 佳則 (非会員)

1949年1月24日生。昭52年立命館大学大学院博士課程了。分布定数系の最適制御に関する研究に従事。現在，(株)京南エレクス専務取締役。計測自動制御学会会員。工学博士。

井上 和夫 (正員)

1935年9月15日生。昭41年大阪大学大学院博士課程了。適応制御，ヒューマンインターフェースに関する研究に従事。現在，立命館大学理工学部情報学科教授。システム制御情報学会，電子情報通信学会，IEEE各会員。工学博士。