

有限個のトランザクション消滅を考慮したシステムの定常解析 —トランザクション消滅過程の定常系内処理時間について—

正員 白井 健二 ((株)情報工房)
非会員 天野 佳則 ((株)京南エレクス)
正員 井上 和夫 (立命館大学)

The stationary analysis for the Queuing system with the limited transaction lost

Kenji Shirai, Member(Johokobo Inc.), Yoshinori Amano, Non-Member(kyohnan Elecs Inc.), Kazuo Inoue, Member(Ritsmeikan University)

The purpose of this paper is to theoretically identify that there exist stationary distributions in the system with the limited transaction lost. In order to examine this type of system, we formulate and analyze the input/output process as the counting process based on point process. Accordingly, we propose the average transit time theoretically in stationary. We presents the simulation and calculation results in order to evaluate the average processing time for this system.

キーワード：トランザクション消滅，点過程，計数過程，マルチンゲール，リトルの公式

1. まえがき

近年，生産系においては，在庫管理手法が経営システムの利益向上のために，益々重要である事が SCM(サプライ・チェーン・マネジメント)手法においても言われている。しかし，在庫管理においては，不良品の発生が必然である以上，数理的に解析することは有用である。本研究では，ジャンプ型確率微分方程式を用いて，定常状態における不良品(トランザクション消滅)の系内処理時間について考察する。

トランザクション消滅とは，入力されたトランザクションが期待される出力の以前に，系外に出力される現象のことをいう。具体例としては，高速道路上，途中出口が存在する場合，製造業での製品検査工程での“ロットアウト”，あるいは C/S 型ネットワークシステムでの衝突によるフレーム消滅^{(7),(8),(9)}等である。

トランザクション消滅は，システム性能全体に大きな影響を与えることになる。トランザクション消滅が，システム全体にどのように影響を与えるかについての研究は，筆者等の知る限りない。

筆者等は，トランザクション消滅のあるシステムの入出力過程全体を“バーチャルキュー”(無限大キュー)という新しい考え方を導入する事により考察している⁽¹⁰⁾。システムのモデル化については，計数過程^{(1),(4)}を用いること

により，本システムに与える影響について解析した⁽¹⁰⁾。

トランザクション消滅が，無限個存在出来ることにに対し，本研究では，有限個という制限を付加している。

本研究の応用としては，ある生産系の在庫管理システムにおいて，入荷量の中に不良品が発生している場合，それを有限の検査時間を通じて系外へ送付(送り側への返送)する場合，その不良品の系内平均処理時間を求める事により，在庫管理システムの評価での一つの指標を与えることになる。

計数過程を用いた過去の研究には，最適制御問題に対して，その定式化とダイナミックプログラミングによる解法がある⁽¹⁾。

製造業における在庫管理の最適化問題として，計数過程を用いて最適解を求めている⁽²⁾。一方，トークンリング型ネットワークをジャンプ型確率微分方程式^{(1),(4),(5)}によりモデル化し，到着とサービス開始時刻が独立な確率過程において，定常状態における問題を解析している⁽³⁾。

本研究は，確率過程における点過程論^{(1),(4),(6)}をベースに，計数過程を活用して理論展開を試みている。トランザクションそのものを点列と見なし，その点列の個数を計数過程として定義している。この時，消滅したトランザクションの論理的扱いとしては，出力構造を持つ独立した計数過程モデルとして定義している。さらに，システムモデルの定式化，定常時における分布とその解析，併せてシミュレー

ション結果を示した。ただし、定常時におけるトランザクションは、それぞれ独立した定常ポアソン過程と仮定し、システムの定常分布を求めている。“アクチュアルアウトプット”とは、システム上でのトランザクション消滅が原因で、“ポテンシャルインプット”から消滅トランザクションが減算された出力トランザクション点列をいう。

最後に、本研究の成果は、有限個のトランザクション消滅のある待ち行列系に対して、Explicit な平均処理時間を求めたところにある。さらに、シミュレーション結果と数値計算結果との比較により上述の解の検証を行っている。

2. 対象システム及び解析モデルについて

<2.1> 入出力および、消滅トランザクションの計数過程について

図1において、システムに到着するトランザクションの到着時点列は、 $\{\hat{T}_q, q=1,2,\dots\}$ で到着する。また、本システム中に消滅するトランザクション有限時点列は、 $\{C_r, r=1,2,\dots,k\}$ で消滅するものとする。システムからの出力トランザクション時点列は、 $\{T_q, q=1,2,\dots\}$ で出力される。かつ、システムに入力されるトランザクションは、システム内に蓄積される。この蓄積されたトランザクションを待ち行列と呼び、時刻 $t(\geq 0)$ におけるその個数を

$Q(t)$ とする。いま、 $Q(t)$ を消費過程 $Q_1(t)$ と後過程 $Q_2(t)$ の二つに分けて考える事にする。この時、図1での流通過程とは、消費過程と後過程を接続する等価的な過程である。流通過程には、遅延時間が発生しない。消費過程とは、 k 個のトランザクション消滅が発生する過程を考慮した $M/M/1$ 型の待ち行列である。

k 個のトランザクション消滅には、消滅に要する処理時間が必要となる。例えば、高速道路の本線上で渋滞が存在する場合、途中の出口から高速を降りる場合が想定される。渋滞の影響を受けて、高速を降りるのにある一定時間を必要とする。そのために、 $\xi_i, i=1,2,\dots,k$ という遅延時間を考慮している。

後過程は、 $M/M/1$ 型の待ち行列である。消費過程 $Q_1(t)$ と後過程 $Q_2(t)$ との違いは、消費過程 $Q_1(t)$ に k 個のトランザクション消滅が発生する事である。

本システムの解析モデルを連続時間パラメータの確率過程としてモデル化する事にする。本研究で定義した“ポテンシャルインプット”とは、システムに入るまでのトランザクション点列をいう。つまり、トランザクション消滅が全く発生していない状態であり、文献(2)での“ポテンシャルインプット”とは、意味が異なる。

$\{\hat{A}(t); t \geq 0\}$ をポテンシャルインプットを表す計数過程(確率過程)とする時、 $\hat{A}(t)$ の計数過程は

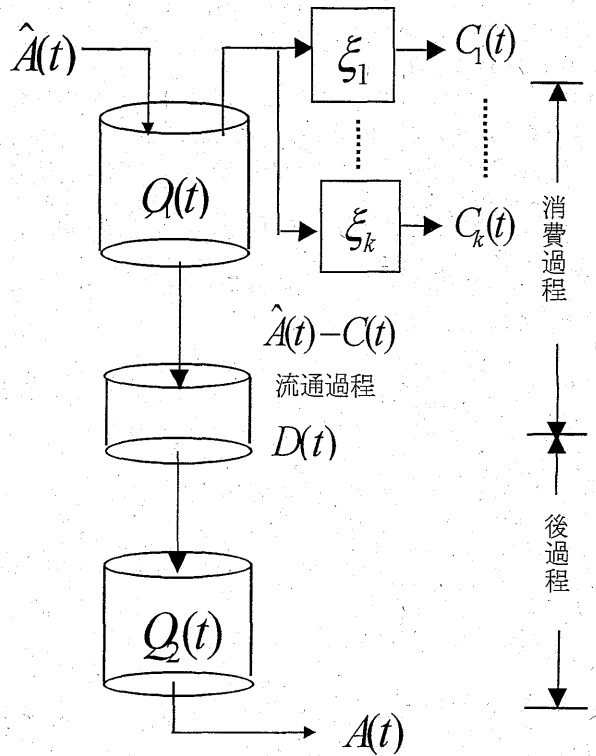


図1. 入出力過程
Fig.1 Input/Output Process

$$\hat{A}(t) = \sum_{q \geq 1} \mathbf{1}_{\{\hat{T}_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (1)$$

また、アクチュアルアウトプット $A(t)$ の計数過程は

$$A(t) = \sum_{q \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (2)$$

と表される。消滅トランザクションの計数過程は、点過程として

$$\{C_r\} = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\} \in C \quad (3)$$

と表す事にする。

消滅トランザクションの計数過程は、 k 個の互いに独立したポアソン分布に従う定常過程であり、 $\{\hat{A}(t)\}$ とも独立である。 $C(t)$ の定義を

$$C(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{(Q_1(s^-) \geq i)} dC_i(s), \quad i=1,2,\dots,k \quad (4)$$

と表す。 $C(t)$ は、 k 個におけるトランザクション消滅を表す定義式である。この式の意味は、消費過程の待ち行列数 $Q_1(t^-)$ が、現在時刻 t の直前の時刻 t^- で存在していればその待ち行列数の総和をカウントしている。さらに、これらは送出遅延時間 $\{\xi_i(t), i=1,2,\dots,k, t \geq 0\}$ を経て、系内トランザクションを系外へ送出するためのものとする。また、(4)式で定義される消滅トランザクションは、システムから見た場合、出力構造を持った計数過程として定義する(図1参照)。 $\{C_i(t), i=1,2,\dots,k\}$ は、トランザクション消滅が i 個における計数過程を表す。次式のようになる。

$$C_i(t) = \sum_{r=1}^i \mathbf{1}_{\{C_r \leq t\}}, \quad r=1,2,\dots \quad (5)$$

また、上述の前提より、その平均は定常性より

$$E[C_i(t)] = \bar{C} \cdot t, \quad t \geq 0, i=1,2,\dots,k \quad (6)$$

が成立するものとする。但し、 $E[\bullet]$ は期待値演算を表している。 \bar{C} は、トランザクション消滅の平均値を表す。ここで、上記指示関数 $\mathbf{1}_{\{s\}}$ は、集合 $\{s\}$ 上で1、それ以外では0の値をとる指示関数である。

本システムのモデル式を、

$$Q(t) = Q(0) + \hat{A}(t) - \sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{(Q_1(s^-) \geq i)} dC_i(s) - A(t) \quad (7)$$

$$i=1,2,\dots,k$$

と表す。図1に従いシステムを

$$Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t) \quad (8)$$

と表す。この時、 $Q_1(t)$ 、 $Q_2(t)$ は各々

$$Q_1(t) = Q_1(0) + \hat{A}(t) - \sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{(Q_1(s^-) \geq i)} dC_i(s) - D(t) \quad (9)$$

$$Q_2(t) = Q_2(0) + D(t) - A(t) \quad (10)$$

$$Q(0) = Q_1(0) + Q_2(0) \quad (11)$$

で表される等価なシステムのモデル式である。但し、(9)、(10)式の $\{D(t)\}$ は、流通過程⁽¹⁰⁾を表しており、

$\{\hat{A}(t) - C(t)\}$ と等価であるものとする。

(8)~(11)式で表現される系は、(7)式の等価系と考える事が出来る⁽¹⁰⁾。

このモデルは、ポテンシャルインプット、アクチュアルアウトプットおよびトランザクション消滅をそれぞれ独立した確率過程として表す事により、待ち行列を表現している。これにより、連続時間下でのトランザクション消滅を考慮した待ち行列系が忠実に表現出来た事になる。

<2・2>入出力および消滅トランザクションのレート

各々のトランザクションのレートについて確率空間 (Ω, F, P) 上で一般的な考察を行う。(7)式に対して $F_t \subset F, t \geq 0$ を増大 σ -加法族を

$$F_t = \sigma\{Q(s), \hat{A}(s), A(s), C(s); 0 \leq s \leq t\} \quad (12)$$

とする。

(7)式で記述されているモデル式で、入出力およびトランザクション消滅を表している計数過程のレートを定義する。 $\{\hat{A}(t), t \geq 0\}$ はレート $\hat{\alpha}(t)$ のポアソン過程、 $\{D(t), t \geq 0\}$ は $\{\hat{A}(t) - C(t)\}$ と等価なポアソン過程であり、そのレートは $(\hat{\alpha}(t) - C^*(t))$ とする。ただし、 $\{\hat{A}(t), t \geq 0\}$ 、 $\{A(t), t \geq 0\}$ 、 $\{C(t), t \geq 0\}$ には、それぞれレート $\{\hat{\alpha}(t)\}$ 、 $\{\alpha(t)\}$ 、 $\{C^*(t)\}$ が存在するものとする。

入出力およびトランザクション消滅を表している計数過程のレートは、任意の非負の可予測過程⁽⁴⁾ $\{\hat{\alpha}(t)\}$ 、

$\{\alpha(t)\}$ 、 $\{C^*(t)\}$ に対して

$$E\left[\int_0^\infty X(s) d\hat{A}(s)\right] = E\left[\int_0^\infty X(s) \hat{\alpha}(s) ds\right]$$

$$E\left[\int_0^\infty X(s) dA(s)\right] = E\left[\int_0^\infty X(s) \alpha(s) ds\right] \quad (13)$$

$$E\left[\int_0^\infty X(s) dC_i(s)\right] = E\left[\int_0^\infty X(s) C^*(s) ds\right]$$

が成り立つ確率過程 $\{\hat{A}(t), t \geq 0\}$, $\{A(t), t \geq 0\}$, $\{C^*(t); t \geq 0\}$, が存在する事である。

【独立性の仮定】：

任意の確率過程 $Y(t)$ を

$$X_t(n) = \mathbf{1}_{\{Y(t)=n\}}, n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

と定義する時, $Y(t)$ の確率分布を

$$P_t(n) = E[X_t(n)], n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

と表せば

$$\begin{aligned} E[X_t(n) \cdot C_i(t)] &= E[X_t(n)] \cdot E[C_i(t)] \\ &= P_t(n) \cdot E[C_i(t)] \end{aligned} \quad (16)$$

が成立する時, $\{X_t\}$, $\{C_i(t)\}$ は独立であるという。同様

に, $\{\hat{A}(t)\}$, $\{A(t)\}$ も $\{X_t(n)\}$ とは独立である。

<2.3> システム定常分布

確率過程

$$Z_t(n) = \mathbf{1}_{\{Q(t)=n\}}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

を定義する。 $Q(t)$ の確率分布は

$$P_t(n) = E[Z_t(n)], n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

と書ける。ここで,

$$\{Z_t(n), t \geq 0\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

は, 入出力のジャンプにより定まるから⁽¹⁾

【付録 A 参照】

$$Z_t(n) = Z_0(n) + \int_0^t f_s ds + m_t \quad (20)$$

$Z_t(n)$ は, 計数過程。 $f_t: F_t$ - 更新過程, m_t : 局所マルチンゲール。入出力過程およびトランザクション消滅過程は, マルコフ性を仮定している⁽¹⁾。よって, (7)式は, 下記の様になる。⁽¹⁾

$$f_t(n) = \{Z_t(n-1)\mathbf{1}_{(n>0)} - Z_t(n)\}\hat{\alpha}(t)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^k \{Z_t(n-1) - Z_t(n)\} \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(t) \\ & + \{Z_t(n+1) - Z_t(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\} \alpha(t) \end{aligned} \quad (21)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$Z_t(n) = Z_0(n) +$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \{Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - Z_s(n)\} \hat{\alpha}(s) ds \\ & - \sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(s) ds \\ & \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\} \alpha(s) ds + m(t) \end{aligned} \quad (22)$$

ただし,

$$m_t(n) = M_t^{\hat{A}}(n) + M_t^A(n) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M_t^{\hat{A}}(n) &= \int_0^t \{Z_{s^-}(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - Z_{s^-}(n)\} \\ & (d\hat{A}(s) - \hat{\alpha}(s) ds) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_{s^-}(n-1) - Z_{s^-}(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} \\ & (dC_i(s) - C^*(s) ds) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_t^A(n) &= \int_0^t \{Z_{s^-}(n+1) - Z_{s^-}(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\} \\ & (dA(s) - \alpha(s) \cdot \mathbf{1}_{\{A(s)>0\}}) ds \end{aligned} \quad (25)$$

但し, (24), (25)式において s^- は, 各時点 s の直前の値

であり, 各被積分項は s^- によって定まる F_t - 可予測過程であり, しかも有界である事を意味している。即ち, 各

$\{M_t^{\hat{A}}\}$, $\{M_t^A\}$ は, F_t - マルチンゲールとなる⁽⁴⁾。

(22)式の右辺第 2 項および第 3 項に対して $E(\cdot)$ 演算を実行すると, 独立性の仮定⁽³⁾より

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [P_t(n)] \\ & = -[\alpha \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} + \{\hat{\alpha} - C^* \text{inf}(n, k)\} P_t(n) + \\ & [\hat{\alpha} - C^* \text{inf}(n, k)] P_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} \\ & + \alpha \cdot P_t(n+1) \quad t \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる【付録 B 参照】。

ここで, (26)式の Kolmogorov の方程式に対する定常分布は,

$$P(n) = \left[\frac{1}{\alpha} \right] \cdot \prod_{j=1}^n [\hat{\alpha} - C^* \text{inf}(j, k)] P(0) \quad (27)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n, k \leq n$$

となり、 $P(0)$ は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \quad (28)$$

となる様に定めた定数である。

以上の様に、筆者等はトランザクション消滅過程は、遅延に要する処理を必要とし、有限個の互いに独立した定常ポアソン過程として拘束した場合、(27)式に示す定常分布を求めた。

前回の研究⁽¹⁰⁾におけるトランザクション消滅を考慮したモデル式に対して、今回の研究は、その消滅を有限個で近似した場合の近似式を与えており、 $k > 1$ の場合は、この近似式を用いる方がトランザクション消滅数の制限に関する情報を正確に表現している。

<2・4>定常時における平均処理時間

筆者等は、トランザクション消滅をシステムから見た場合、“消費過程”と認識する⁽¹⁰⁾。ここでは、 k 個のトランザクション消滅数の場合について平均処理時間を求めることにする。

そこで、入出力過程を次の様に考える。バーチャルキューをトランザクション消滅が発生するまでの過程を消費過程とし、この時点で滞留するトランザクションのキューを $Q_1(t)$ 、トランザクション消滅が発生した後の過程を後過程とし、この時点で滞留するトランザクションのキューを $Q_2(t)$ の二つに分けて考える事にする。

入力から出力までに要する時間をシステム処理時間と考える。システムにおけるトランザクション処理時間を次の様に表す。

$$W_F(t) = W_R(t) + S_R(t) \quad (29)$$

ただし、

$W_F(t)$: 系内トランザクション処理時間

$W_R(t)$: 待ちトランザクション処理時間

$S_R(t)$: 消滅トランザクションの系外送出時間

である。図1.より、このシステムにおけるトランザクションの平均処理時間は

$$W_R = W_{R1} + W_{R2} \quad (30)$$

と定義できる。今、リトルの公式^{(3),(6)}によれば、

$$W_{R1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_1(n)}{\hat{\alpha}} \quad (31)$$

$$W_{R2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_2(n)}{\alpha} \quad (32)$$

$P_1(n), P_2(n)$ は、それぞれ消滅過程、後過程の定常分布である。ここで $P_1(n), P_2(n)$ に関して分布そのものは、同一形態の分布を示し、かつ以下の様に仮定する。

$$P_1(n) \approx P_2(n) \quad (33)$$

よって、システム処理時間 W_R は、

$$W_R \approx L \cdot W_{R2} \quad (34)$$

と表す。

ここで、 $L (> 2)$ はシステム処理時間に対する流通係数と呼ぶ。

(29)式右辺第2項を次の様に定義する。

$$S_R(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i(t) \mathbf{1}_{\{Q_1(s^-) \geq 0\}} \quad (35)$$

$\{\xi_i(t), i = 1, 2, \dots, k\}$ は、 k 個の消滅トランザクション処理時間を表している。

系外送出時間 $\{\xi_i(t), i = 1, 2, \dots, k\}$ と待ち行列数 $\{Q_1(t)\}$

とは独立であると仮定する。この仮定は、製造業において、不良品の処理は入荷量とは独立に処理されるものと考えると妥当性のあるものである。

この仮定と定義のもとで(35)式の両辺に期待値演算を実行すると

$$\begin{aligned} E[S_R(t)] &= E\left[\sum_{i=1}^k \xi_i(t) \mathbf{1}_{\{Q_1(s^-) \geq 0\}}\right] \\ &= S(i) \cdot E[\mathbf{1}_{\{Q_1(s^-) \geq 0\}}] \\ &= S(i) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{inf}(k, n) P(n) \end{aligned} \quad (36)$$

と書ける。

(29), (34), (36)式より、本システムの平均トランザクション処理時間は

$$W_F(t) = L \cdot W_{R2} + S(i) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{inf}(k, n) P(n) \quad (37)$$

と表される。ただし、(36)、(37)式において

$$E[\xi_i(t)] = S(i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (38)$$

と置いた。

ここで、(7)式の両辺の平均をとると

$$E[\hat{A}(t) - A(t)] = E\left[\sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{\{Q(s) \geq i\}} dC_i(s)\right] \quad (39)$$

となる。(39)式は、両辺共に独立した定常ポアソン過程であるので、(6)式を用いれば

$$[\hat{\alpha} - \alpha] \cdot t = \bar{C} \cdot t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{inf}(k, n) P(n) \quad (40)$$

と変形出来る。

(40)式より、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{inf}(k, n) P(n) = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\bar{C}} \quad (41)$$

となる。

(37)、(41)式より

$$W_F = L \cdot W_{R2} + \left(\frac{S(i)}{\bar{C}}\right) \cdot (\hat{\alpha} - \alpha) \quad (42)$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

が得られる。ただし、等価系の考えによれば

$$W_{R2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_2(n)}{\hat{\alpha} - C^*} \quad (43)$$

である。(P₁(n) ≈ P₂(n)の仮定より)

この等価系の考え方にに基づき、(27)式を形式的に

$$P(n) = \left[\frac{1}{\alpha}\right]^n \cdot \prod_{j=1}^n [\hat{\alpha} - C^*] P(0) \quad (44)$$

$$\cong \left[\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha}\right]^n \cdot P(0),$$

$$n > 0$$

と変形する。ただし、 $\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha} < 1$ である。

それ故、(44)式より $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$ となる様にP(0)を定める

と(44)式は

$$P(n) = \left[1 - \frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha}\right] \cdot \left[\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha}\right]^n \quad (45)$$

$$n > 0$$

と書ける。(45)式を用いると(43)式よりW_{R1}は

$$W_{R2} = \frac{(\hat{\alpha} - C^*)}{\hat{\alpha}[\alpha - (\hat{\alpha} - C^*)]} \quad (46)$$

と求まる。

(42)、(46)式より、系内トランザクション平均処理時間は

$$W_F = L \cdot \frac{\{\hat{\alpha} - C^*\}}{\hat{\alpha}[\alpha - \{\hat{\alpha} - C^*\}]} + \left[\frac{S(i)}{\bar{C}}\right] \cdot (\hat{\alpha} - \alpha) \quad (47)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, k \leq n, n > 0$$

と表される。

(47)式を用いば、系内トランザクションの平均処理時間が求められる。

3. シミュレーション結果およびその考察

(47)式における流通計数Lは、参考文献(10)のシミュレーション結果で得られた近似値を数値計算に適用した。以下の通りである。

トランザクション消滅(C*)	流通係数(L)
20	2.02921
25	2.44997
30	2.33040

さらに、トランザクション消滅の計数過程の期待値を $\bar{C} = 1$ 、トランザクション消滅に要する処理時間を

$S(k) = 0.001(\text{Sec})$ とする。

シミュレーション条件は、下記の通りである。

- トランザクション生成
トランザクション長：100バイト(固定)
発生分布：指数分布(分布のパラメータとして平均値

を与える($\hat{\alpha}$)

- トランザクションの処理時間(正常処理分)
処理時間：処理速度から算出($\alpha = 40(pk/sec)$ として一定)
- トランザクション消滅
 C^* と α の比率により算出 $C^*/(C^* + \alpha)$
- シミュレーション時間
20000 秒
- 平均処理時間
上記シミュレーション時間中に、処理対象となった各トランザクションの処理時間の平均値(秒)

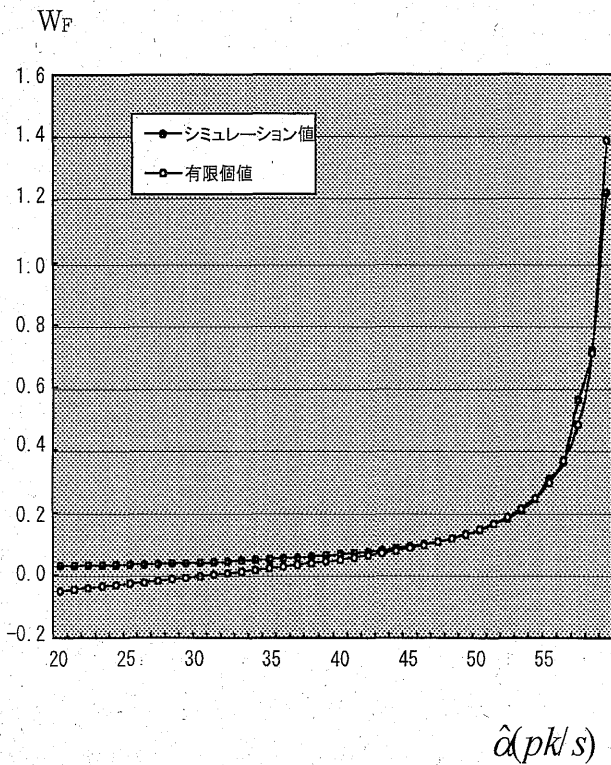


図 2. 平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果
Fig.2 The comparison between simulation and calculation for the transit time-lag in stationary

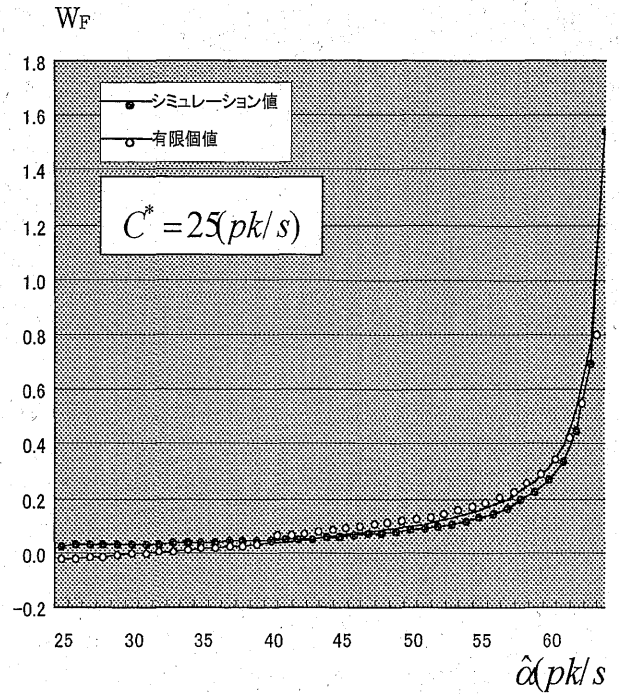


図 3. 平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果
Fig.3 The comparison between simulation and calculation for the transit time-lag in stationary

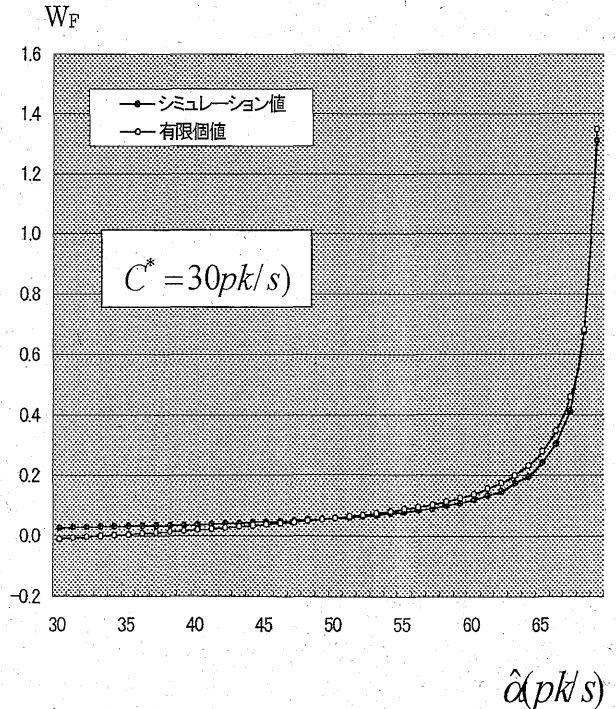


図 4. 平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果
Fig.4 The comparison between simulation and calculation for the transit time-lag in stationary

図2～図4について記述する。図2はポテンシャルインプット $\hat{\alpha}$ の値が $30(pk/s)$ 以下では平均処理時間が負の値となる。これは、入出力レート、トランザクション消滅レートがそれぞれ独立したポアソン過程であると仮定している事に起因している。シミュレーション時間が20000秒なのでトランザクション消滅の個数は、400000個である。

図3は、図2と同様にポテンシャルインプット $\hat{\alpha}$ の値が $30(pk/s)$ 以下では平均処理時間が負の値となる。これは、入出力レート、トランザクション消滅レートがそれぞれ独立したポアソン過程であると仮定している事に起因している。シミュレーション時間が20000秒なのでトランザクション消滅の個数は、500000個である。

図4は、図2と同様にポテンシャルインプット $\hat{\alpha}$ の値が $35(pk/s)$ 以下では平均処理時間が負の値となる。これは、入出力レート、トランザクション消滅レートがそれぞれ独立したポアソン過程であると仮定している事に起因している。シミュレーション時間が20000秒なのでトランザクション消滅の個数は、600000個である。

図2～図4までの数値計算結果が、シミュレーション結果と同じ傾向を示していることより、(47)式は意味のある解析結果と判断した。

4. むすび

本研究は、トランザクション消滅を入力過程とは独立した確率過程として定義する事により、(7)式の様なシステムモデル式を提案した。ここでは、入出力過程及びトランザクション消滅過程を各々独立したポアソン過程であると仮定している。この事の妥当性が得られた。

有限個のトランザクション消滅の場合についての平均処理時間を求め、かつその検証を行った。本システムに与える要因は、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響する事がシミュレーションで確認した。

本研究は、有限個のトランザクション消滅が存在するシステムに対し、その容量設計のためのシステム評価手法として(47)式が有用である。

最後に、本シミュレーションに際しては、ネットワークシミュレーションツール“OPNET”を使用した。(株)情報工房 システム技術部宇都宮課長には、シミュレーション実行で多大な協力を頂いた。ここで感謝の意を表す。(平成11年12月07日受付、平成12年03月29日再受付)

付録 A

(17)式で定義した $Z_t(n)$ に関して以下の式が成り立つ。

$$Z_t(n) = Z_t(0) + \sum_{0 \leq s < t} (Z_t(n) - Z_{s^-}(n)) \quad (\text{A.1})$$

$$= \sum_{0 \leq s < t} (Z_s(n) - Z_{s^-}(n))(\Delta \hat{A}_s - \Delta C_s) + \sum_{0 \leq s < t} (Z_s(n) - Z_{s^-}(n))\Delta A_s \quad (\text{A.2})$$

$$= \int_0^t (Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - Z_{s^-}(n))(\Delta \hat{A}_s - dC_s) + \int_0^t (Z_{s^-}(n+1) - Z_{s^-}(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)})dA_s \quad (\text{A.3})$$

$$= Z_0(n) + \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\}\hat{\alpha}(t)ds - \sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(s)ds + \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}\}\alpha(s)ds + m(t) \quad (\text{A.4})$$

(A.3)式から(A.4)式への展開にマルチンゲール理論を適用している。

付録 B

(25)式右辺第2項は

$$E[\int_0^t \{Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - Z_s(n)\}\hat{\alpha}(s)ds] = \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - P_s(n)\}E[\hat{\alpha}(s)]ds$$

右辺第3項において

$$E[\sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n)\} \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(s)ds] = \sum_{i=1}^k \int_0^t \{P_s(n+1) \cdot \mathbf{1}_{(n+1 \geq i)} - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n \geq i)}\}E[C^*(s)]ds = \sum_{i=1}^k \int_0^t \{P_s(n+1) \cdot \mathbf{1}_{(n+1 \geq i)} - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n \geq i)}\}E[C^*(s)]ds = \int_0^t \{inf(n+1, k)P_s(n+1) - inf(n, k)P_s(n)\}E[C^*(s)]ds \quad (\text{B.1})$$

となる。次に、第4項は

$$E[\int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\}\alpha(s)ds] = \int_0^t \{P_s(n+1) - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\}E[\alpha(s)]ds \quad (\text{B.2})$$

となる。第 5 項はマルチンゲールだから、期待値 $E[m(t)] = 0$ である。

ゆえに、(22)式の $E(\cdot)$ を実行すると

$$\begin{aligned}
 P_t(n) &= P_t(0) \\
 &+ \int_0^t \{P_s(n-1)\mathbf{1}_{(n>0)} - P_s(n)\} E[\hat{\alpha}(s)] ds \\
 &- \int_0^t \{inf(n+1, k)P_s(n+1) - inf(n, k)P_s(n)\} E[C^*(s)] ds \\
 &+ \int_0^t \{P_s(n+1) - P_s(n)\mathbf{1}_{(n>0)}\} E[\alpha(s)] ds \quad (B.3)
 \end{aligned}$$

が得られる。次に、 $\{\hat{A}(t)\}, \{A(t)\}, \{C(t)\}$ の各定常レート

$\{\hat{\alpha}\}, \{\alpha\}, \{C^*\}$ が、ある非負の $E[\phi_{\hat{\alpha}}] < \infty$, $E[\phi_{\alpha}] < \infty$,

$E[\phi_{C^*}] < \infty$ を満たす確率変数 $\phi_{\hat{\alpha}}$, ϕ_{α} , ϕ_{C^*} によって、

$\hat{\alpha} \leq \phi_{\hat{\alpha}}$, $\alpha \leq \phi_{\alpha}$, $c \leq \phi_{C^*}$, 但し、 $t \geq 0$ を満たすなら定常性から余り離れないと仮定する。よって、(B.3)式に微分演算を実行すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}[P_t(n)] &= \\
 &+ (P_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - P_t(n)) \hat{\alpha} \\
 &- C^* \cdot inf(n, k) P_t(n-1) + C^* \cdot inf(n, k) P_t(n) \\
 &+ \{P_t(n+1) - P_t(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\} \alpha \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}[P_t(n)] &= -[\alpha \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} + \{\hat{\alpha} - C^* \cdot inf(n, k)\}] P_t(n) \\
 &+ \{\hat{\alpha} - C^* \cdot inf(n, k)\} P_t(n-1) \mathbf{1}_{(n>0)} \\
 &+ \alpha P_t(n+1) \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

が得られる。

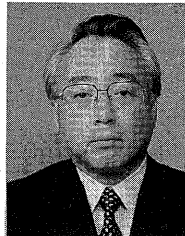
文 献

- (1) Bremaud P. "Point Process and Queues Martingale Dynamics" p27, pp85-pp87, p117, pp123-p127 Springer-Verlag New York Inc. (1981).
- (2) LODÉ LI "A Stochastic Theory of The Firm" Mathematics of operations research, Vol13, No3, August 1988.
- (3) 箕輪弘之: 「トークンリング型ネットワークのジャン

プタイプ確率微分方程式を用いたモデル化」電子情報通信学会論文誌, B-1, Vol.J78-B-1, No.7 pp272-PP278, 1995年7月

- (4) 宮沢政清: 「確率と確率課程」 p90, 近代科学者(1993)
- (5) A.SEGALL and T.KAILATH "The Modeling of Randomly B. Modulated Jump Process", IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-21, NO.2, pp.135-143, MARCH 1975
- (6) 川島幸之助・町原文明・高橋敬隆・斎藤 洋: 「通信トラフィック理論の基礎とマルチメディア通信網」 p70-p97, 電子情報通信学会, 1995年11月
- (7) 白井・天野・井上: 「衝突を考慮したC/S型ネットワークのジャンプ型確率微分方程式を用いたモデル化」 96年11月電気関係学会関西支部連合大会
- (8) K.SHIRAI, Y.AMANO and K.INOUE "Stochastic modeling and stationary distributions for the C/S type network with collision by using Jump Process", Memoirs of Institute of Science and Engineering, Ritsumeikan University, Shiga, Japan. No.55, 1996
- (9) 白井・天野・井上: 「フレーム衝突を含む一般化C/S型ネットワークのモデル化および定常分布」 97年3月, 信学春季全大
- (10) 白井・天野・井上: 「トランザクション消滅のある待ち行列システムの定常解析」 1998年10月, 電気学会論文誌 Vol.118-C

白井 健二 (正員)



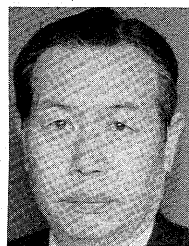
昭 50 年立命館大学大学院修士課程了。確率モデルおよび最適制御に関する研究に従事。現在、(株)情報工房代表取締役社長。計測自動制御学会, 電子情報通信学会, 日本航空宇宙学会各会員。

天野 佳則 (非会員)



昭 52 年立命館大学大学院博士課程了。分布定数系の最適制御に関する研究に従事。現在、(株)京南エレクトクス専務取締役。計測自動制御学会会員。工学博士。

井上 和夫 (正員)



昭 41 年大阪大学大学院博士課程了。適応制御, ヒューマンインターフェースに関する研究に従事。現在, 立命館大学理工学部情報学科教授。システム制御情報学会, 電子情報通信学会, IEEE 各会員。工学博士。