論　文

トランザクション消滅のある待ち行列系に対する流通評価
－流通収益最大問題における最適性の条件－

正員　白井健二　((株)情報工房)
非会員　天野佳則　((株)京南エレクス)
正員　井上和夫　(立命館大学)

The stationary optimal condition for the Queuing System with transaction lost

Kenji Shirai, Member(Johokobo Inc.), Yoshinori Amano, Non-Member(kyohnan Elecs Inc.), Kazuo Inoue, Member(Ritsumeikan University)

The purpose of this paper is to theoretically identify the condition for an optimal control problem in this type of system with transaction lost in stationary. We propose the transportation process based on the counting process in input/output process. Accordingly, we make clear this stationary optimal condition for this type of system. We also provide an optimal control solution for the maximum revenue by using a value function in transportation process.

キーワード：トランザクション消滅，計数過程，リーマン・スチルチェス積分，最適制御

1. まえがき

筆者等は先に，トランザクション消滅がある待ち行列系に対して定常分布と系内滞留時間について報告した[11]。例えば，生産系における種々のシステムにおいては必ず何らかのトランザクション消滅過程が存在する。製造工程におけるロットアウト，不良品の発生，系の入り口側渋滞によるサービスロス，大量通信データのコリジョンによるデータ損失(単位時間当りのロス換算)等々，あらゆるシステムにおいて損失が発生するものである。

それ故，本論文では，ある製造設備において設備の生産容量に制限があり，さらに入り口側(入力側)に十分大きなストッカー(待ち行列系)を仮定し，それからの出力過程を自設備の入力過程と考え，その入力過程を制御する事により設備の上限を管理し，設備内で発生する損失過程(トランザクション消滅過程)と前述の入力過程とを制御する事により製造収益の最大化問題を定式化し，さらに損失過程のレートと入力過程のレートとの間に比例関係を仮定する事により，ある最適性の不等式条件を導いた。

本研究の目的は，トランザクション消滅のある流通過程を種々の前提(仮定)のもとで待ち行列系の一つの要素として表し，この様なシステムに対する流通評価を考える事にある。

ここで，トランザクション消滅過程の独立性については，生産系における「不良品発生」に見出せる。不良品の発生要因としては，「原材料の不良」，「生産設備システムの不具合」，「人的ミス」等が考えられる。品質管理者は，品質評価基準の基に，ある期毎に不良品発生率を管理している。ところが，品質管理者の意図とはうらはらに，不良品発生率のある一定基準値を守れない場合が多々ある。理由は，発生要因が一定しないためである。このような「不良品発生」は，必ずしも自設備内の待ち行列長に比例するものではない。よって，トランザクション消滅過程を独立性した確率過程として取り扱うことは，工学的には意味のある問題である。本研究の応用としては，生産系における製品検査処理効率化問題等の解決の一助になると思われる。

本論文は，対象システムのモデル化手法としては，確率過程における計数過程[1]~[7]を用いている。計数過程を用いた過去の最適制御問題に関する研究は，確率過程をベースにした待ち行列システムに対する基本的定式化のための解析がなされている。さらに，最適制御問題に対して，その定式化とダイナミックプログラミングによる解析が成されている[1]。製造業における在庫管理の最適化問題として，計数過程を用いて最適解を求めている[2]。バーチャルパイプライン上で発生するトランザクション消滅を，本システムでの損失(Loss Cost)と考える。評価関数は，システムに供給されるトランザクション数を収益と考え，収益が最大となる様に定義している。

2. 対象システム及び最適性の不等式条件について

図1は，対象としているシステムの概念図である。$\hat{A}(t)$は，自設備の前段にある大きなストッカーへの入力過程である。$Q_s(t)$は，待ち行列数が無限大の容量を持つバーチャルパイプライン[(8)~(11)]である。$Q(t)$は，自設備内における容量制限付き待ち行列数を表す。$A(t)$は，自設備内への入力過程を表す。$C(t)$は，自設備内で発生するトランザクション消滅過程である。$D(t)$は，自設備からの出力過程を表す。$\hat{A}(t)$，$A(t)$，$C(t)$，$D(t)$は，それぞれ独立したポアソン過程とする。

今，図1の様なシステムに対してシステムモデルを次の様に表す。まず，バーチャルキューに対しては

$$Q_S(t) = Q_S(0) + \hat{A}(t) - A(t) \qquad (1)$$

とする。但し，この待ち行列の容量は無限大である。即ち，$0 \le Q_S(t) \le \infty$と仮定する。

次に，トランザクション消滅過程を含む待ち行列系を下記のモデル式で表すと

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(0) + A(t) - C(t) - D(t) \\ &= x + A(t) - C(t) - D(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

となる。この時，待ち行列数$Q(t)$には，次の様な制限が存在する。ここで，$0 \le Q(t) \le B$と表す。但し，Bは正の整数である。

即ち，(1)～(2)式は，図1の様な待ち行列系を表している。

今，(1)式で表現されるシステムは無限大のキューを持つシステムであり，これは，例えば製造設備における入力側(供給側)の容量が無限大である事を意味している。この事は自設備($Q(t)$)の要求するデマンドに対して，限りなく要求されるレートで入力出来る設備をもつ事である。これにより自設備は，入力側のレートを制御変数として定義出来る事になる。また，トランザクション消滅過程が制御変数として定義出来る時は，例えば自設備に入力される製品(トランザクション)における不良品(トランザクション消滅過程)の発生レートを制御する事であり，この事は自設備における入力側の設備に対する発生要因の解消により達成

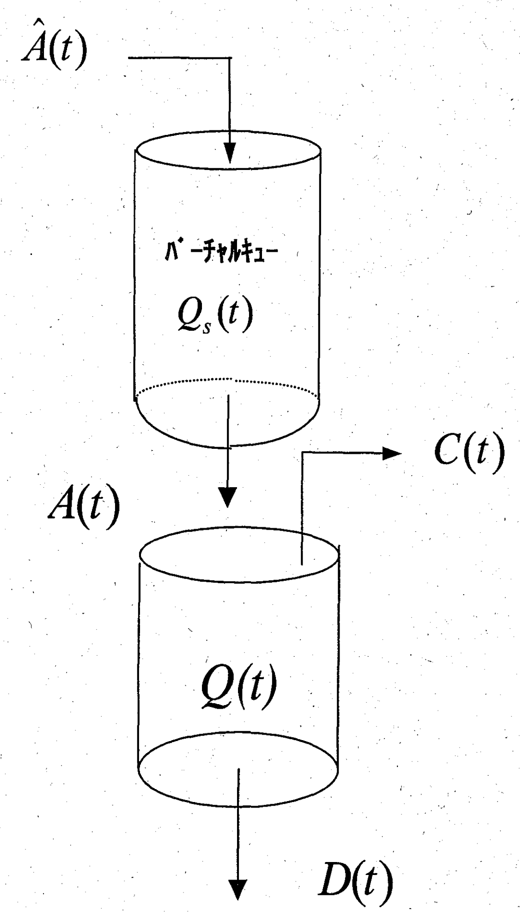


図1. システム概念図
Fig.1 System Concept

できる事になる。それ故，本研究では次の様にモデル化する。

即ち，入力側の制御過程として流通過程$A_T(t)$を次の様に定義する。

$$A_T(t) = A(t) - D(t) \qquad (3)$$

である。但し，

$$A_T(0) = A(0) - D(0) = 0 \qquad (4)$$

とする。

一般に，待ち行列系においては入力過程を制御する事は奇異に思えるが，本研究の様なシステムの条件のもとでは妥当性のあるものであり，現実の生産系システムにおいても，その評価を考える上で有用であると思われる。

以上の考え方のもとで，入出力過程及びトランザクション消滅過程を次の様に表す。

以上の考え方のもとで，入出力過程及びトランザクション消滅過程を次の様に表す。

$\{\hat{A}(t); t \geq 0\}$ を入力過程を表す計数過程(確率過程)とする時，$\hat{A}(t)$ の計数過程は

$$\hat{A}(t) = \sum_{q \geq 1} \mathbf{1}_{\{\hat{T}_q \leq t\}}, \quad q = 1,2,\cdots \tag{5}$$

また，出力過程 $A(t)$ の計数過程は

$$A(t) = \sum_{q \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_q \leq t\}}, \quad q = 1,2,\cdots \tag{6}$$

と表される。 消滅トランザクションの点過程は

$$\{C_r\} \in \{C_1, C_2, C_3, \cdots\cdots\cdots\} = C \tag{7}$$

であることから，消滅トランザクションの計数過程は，

$$C(t) = \sum_{r \geq 1} \mathbf{1}_{\{C_r \leq t\}}, \quad r = 1,2,\cdots \tag{8}$$

と書ける。 ここで，上記指示関数 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ は，集合 $\{\cdot\}$ 上で 1，それ以外では 0 の値をとる指示関数である。

制御変数として，入力過程 $\hat{A}(t)$ のレートを $\hat{\alpha}(t)$ 及びトランザクション消滅過程 $C(t)$ のレートを $C^*(t)$，出力過程のレートを $d(t)$，流通過程 $A_T(t)$ のレート $\alpha_T(t)$ を考える。つまり

$$\alpha_T(t) = \hat{\alpha}(t) - d(t) \tag{9}$$

ここで，$Q(t)$ の制限により $\alpha_T(t)$ の上限値を $\alpha_T^B(Q(t))$，$C(t)$ の上限値を $C^*(Q(t))$ とする。この時，上述のレートの制限による上限値を，それぞれ次の様に表す。

$$0 \leq \alpha_T(t) \leq \alpha_T(Q(t)) \tag{10}$$

$$0 \leq C^*(t) \leq C^*(Q(t)) \tag{11}$$

さらに，(10)，(11)式で表される制御変数の集合を

$$u \equiv \{\alpha_T(t), C^*(t), t \geq 0\} \tag{12}$$

と表す。

図 1 の流通系においてコスト関数を以下に様に表す。収益コストとして流通過程を取ると，以下の様になる。

$$TR(x) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt} a dA_T(t)\right] \tag{13}$$

ここで，r はディスカウントレイト，$a > 0, E_x[\cdot]$ は，期待値演算を表す．a は，流通トランザクションの単価を表す。

つぎに，支出コストとして，消滅過程によるものおよび設備によるものが考えられるから

$$TC(x) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt}[b dC(t) + qQ(t)dt]\right] \tag{14}$$

ここで，b は，トランザクション消滅過程の単価，q は，在庫品の単価を表す。(14)式に Riemann-Stieljes の積分公式を利用すると**【付録-1 参照】**

$$\begin{aligned} TC(x) &= E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt}[b dC(t) + qQ(t)dt]\right] \\ &= E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt} b dC(t)\right] \\ &\quad + E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt} q[A_T(t) - C(t)]dt\right] + \frac{q}{r}x \\ &= E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt}\left\{\frac{q}{r} dA_T(t) + \left(b - \frac{q}{r}\right) dC(t)\right]\right. \\ &\qquad + \frac{q}{r}x \end{aligned} \tag{15}$$

と変形出来る。ただし，(15)式を変形するのに(3)，(4)式を用いた。それゆえ，コスト関数は，初期値を無視すれば

$$\begin{aligned} V(x) &= TR(x) - TC(x) \\ &= E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt}\{\mu dA_T(t) - \nu dC(t)\}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

$$\text{ただし，} \mu = a - \frac{q}{r}, \nu = b - \frac{q}{r} \tag{17}$$

ここで，$\hat{A}(t), A(t), C(t)$ は，それぞれ独立したポアソン過程であると仮定する。

【最適性の条件】

制御変数 $\alpha_T(t)$，$C^*(t)$ において次の様な切り換え制御を考える。$\alpha_T(t)$ に対して

$$\alpha_T^B[Q(t)] = \begin{cases} \alpha_T[Q(t)] & {}^\forall Q(t) \leq B - 1 \\ 0 & {}^\forall Q(t) \geq B \end{cases} \tag{18}$$

次に，$C^*(t)$ に対して

$$C^{*B}[Q(t)] = C^*[Q(t)], \ {}^\forall Q(t) \geq 0 \tag{19}$$

とする。

(18)式によれば，$Q(t)$ の拘束条件(3)式を満たすように，$Q(t)$ が制限内であれば $\alpha_T[Q(t)]$ の様な制御変数により入力側の制御を行い，制限値以上になれば $\alpha_T^B[Q(t)]=0$ に切り換える。$\alpha_T(t)=d(t)$ となる様に入力レートを出力レートに合わせれば良いことになる。また，$C^*(t)$ に関しては，前述したようにトランザクション消滅過程の発生レートを制御することにより達成できる。

それゆえ，(18)，(19)式のような制御変数の集合を，つぎのように定義する。

$$u^*(t)=\{\alpha_T^B[Q(t)], C^{*B}[Q(t)], t\ge 0\} \tag{20}$$

このとき，$Q(t)$ が $y\ne x$ である最適な状態 y に到達する時刻を

$$T(y)=\inf\{t\ge 0, Q(t)=y\} \tag{21}$$

と表す。これは，マルコフストッピングタイムと呼ばれるものである。この $T(y)$ を用いれば，(20)式により定義される制御変数に対して(16)式は

$$V^B(x)=E_x\left[\int_0^{T(y)} e^{-rt}(\mu\alpha_T^B(Q(t))-\nu C^{*B}(Q(t)))dt\right] + E_x[e^{-rT(y)}V^B(Q(y))] \tag{22}$$

と変形できる[6]。

(22)式の右辺第一項は，$A_T(t)$ と $C(t)$ に関するポアソン過程の仮定により，$T(y)$ はそれぞれのレートをパラメータとする指数分布となることより

$$[\mu\alpha_T^B(x)-\nu C^{*B}(x)] = \frac{\mu\alpha_T^B(x)-\nu C^{*B}(x)}{C^{*B}(x)+\alpha_T^B(x)+r} \tag{23}$$

となる。さらに，(22)式右辺第二項は

$$E(e^{-rT(y)})E\{E_x[V^B(Q(T(y))|Q(T(y))]$$

$$=\frac{C^{*B}(x)+\alpha_T^B(x)}{C^{*B}(x)+\alpha_T^B(x)+r}$$

$$\left[\frac{C^{*B}(x)}{C^{*B}(x)+\alpha_T^B(x)}V^B(x+1) + \frac{\alpha_T^B(x)}{C^{*B}(x)+\alpha_T^B(x)}V^B(x-1)\right]$$

$$=\frac{1}{+C^{*B}(x)+\alpha_T^B(x)+r}[C^{*B}(x)V^B(x+1) + \alpha_T^B(x)V^B(x-1)] \tag{24}$$

が得られる。

さらに，(24)式は

$$rV^B(x)=C^{*B}(x)V^B(x+1) + \alpha_T^B(x)V^B(x-1)-\alpha_T^B(x)V^B(x) - C^{*B}(x)V^B(x)+\mu\alpha_T^B(x)-\nu C^{*B}(x)$$

$$rV^B(x)=C^{*B}(x)\Delta V^B(x+1)-\alpha_T^B(x)\Delta V^B(x) + \mu\alpha_T^B(x)-\nu C^{*B}(x) \tag{25}$$

ただし，　$V^B(x)=V^B(x)-V^B(x-1)$ である。

【命題－1】：最適性の必要条件

ここで，切り換え制御が，最適性の必要条件を与えることについて述べる。切り換え制御 $u^*(t)$ が以下の条件を満足すると仮定する。

(イ) $1\le Q(t)\le B-1$ の時，(18)，(19)式を考慮すれば

$$\nu\le\Delta V^B(x)\le\mu \tag{26}$$

(ロ) $Q(t)\ge B$ の時，同様に

$$\Delta V^B(x)\le\nu \tag{27}$$

であれば良い。ただし，

$$\Delta V^B(x)=V^B(x)-V^B(x-1) \tag{28}$$

この時の切り換え制御は $u^*(t)$ である。

【証明】

ある許容制御 $\hat{u}$ は，時刻 t の関数で，かつ切り換え制御 $u^*(t)$ に連続な関数である。ここで，$\hat{u}$ に関するコスト関数を以下のように定義する。

$$V_t^{\hat{u}}(x) = E_x\int_0^t e^{-rs}[\mu\alpha_T(s) - \nu C^*(s)]ds$$

$$+ E_x[e^{-rt}V^B(Q(t))] \qquad (29)$$

以上の解析より，(29)式は，文献(6)より以下の結果が得られる。詳細は，**【付録－2】**を参照してください。

$$V_t^{\hat{u}}(x) = V^B(x)$$

$$+ E_x\int_0^t e^{-rs}\{[C^{*B}(Q(s) - C^*(s)]$$

$$[[\nu - \Delta V^B(Q(s)+1)]$$

$$+ [\alpha_T^B(Q(s)) - \alpha_T(s)]$$

$$[\Delta V^B(Q(s)) - \mu]\}ds \qquad (30)$$

再度繰り返すと，切り換え制御$u^*(t)$は以下の様になる。

$$\alpha_T^B(Q(t)) = \begin{cases} \alpha_T(Q(t)), Q(t) \le B-1 \\ 0, \qquad ,Q(t) \ge B \end{cases}$$

$$C^{*B}(Q(t)) = C^*(Q(t)), \quad Q(t) \ge 0 \quad (31)$$

(10)，(11)式および(26)，(27)式の条件により，(30)式右辺第2項の期待値積分項は正または零となる。

それゆえ，$V_t^{\hat{u}}(x) \le V^B(x)$が$t \ge 0$における任意の$\hat{u}$において成立する。ここで，$t \to \infty$としたとき，$V^{\hat{u}}(x) \le V^B(x)$が得られるから，(31)式で定義される切り換え制御の最適性が保証される。

次に，(25)式より

$$rV^B(x) = C^{*B}(x)\Delta V^B(x+1)$$

$$- \alpha_T^B(x)\Delta V^B(x) + \mu\alpha_T{}^B(x) - \nu C^{*B}(x) \qquad (32)$$

が得られる。さらに，(32)式より

$$rV^B(x-1) = C^{*B}(x-1)\Delta V^B(x)$$

$$- \alpha_T^B(x-1)\Delta V^B(x-1)$$

$$+ \mu\alpha_T^B(x-1) - \nu C^{*B}(x-1) \qquad (33)$$

となるから，{(32)―(33)}を計算すると

$$\{C^{*B}(x) + \alpha_T^B(x-1) + r\}\Delta V^B(x)$$

$$= C^{*B}(x)\Delta V^B(x+1)$$

$$+ \alpha_T^B(x-1)\Delta V^B(x-1)$$

$$+ \mu\Delta\alpha_T^B(x) - \nu\Delta C^{*B}(x) \qquad (34)$$

が得られる。これより(34)式は

$$\Delta V^B(x)$$

$$= \frac{C^{*B}(x)\Delta V^B(x+1) + \alpha_T^B(x-1)\Delta V^B(x-1)}{C^{*B}(x) + \alpha_T^B(x-1) + r}$$

$$+ \frac{\mu\Delta\alpha_T^B(x) - \nu\Delta C^{*B}(x)}{C^{*B}(x) + \alpha_T^B(x-1) + r} \qquad (35)$$

と変形できる。ただし，

$$\Delta C^{*B}(x) = C^{*B}(x) - C^{*B}(x-1)$$

$$\Delta\alpha_T^B(x) = \alpha_T^B(x) - \alpha_T^B(x-1) \qquad (36)$$

である。

この様な条件のもとで決定された制御変数$\alpha_T^B(Q(t))$；$0 \le Q(t) \le B-1$に対して，(1)式により定義されるシステムの定常分布は筆者等の研究によれば

$$P_s(n) = \left[\frac{\hat{\alpha} - \alpha_T^B(m)}{d}\right]^n \cdot P_s(0) \qquad (37)$$

と表される。**【付録-3 参照】**

即ち，(1)～(3)式により定義されるシステムが成立するためには，(2)，(3)式で定義されるシステムが(26)，(27)式の条件のもとで(18)，(19)式の制御変数が存在することが必要であり，このシステムの前提条件としての(1)式の定常分布(37)式が成立することが必要である。

(37)式の定常分布が存在するための条件は

$$\left(\frac{\hat{\alpha} - \alpha_T^B(m)}{d}\right) < 1 \qquad (38)$$

となる。ただし，$0 \le m \le B-1$である。

これにより，(38)式の様な条件を満足する様に$\alpha_T^B(m)$を仮定すれば，バーチャルキューは定常分布を持つことが出来るから，(1)式の様なシステムを設計することは可能となる。

次に，(26)，(27)式の最適性の必要条件が満たされるためには，(35)式の$\Delta V^B(x)$の存在を証明する必要があり，以下では，その存在条件を明確にする。

いま，$\mathbf{u}^B(x) \equiv \quad V^B(x)$とおくと

$$\mathbf{u}^B(x) \equiv col\{\mathbf{u}^B(1), \sim, \mathbf{u}^B(Q^*)\} \quad (39)$$

の様にB次元ベクトルが定義出来るから，(35)式より

$$\mathbf{u}^B(x) = \mathbf{A}\mathbf{u}^B(x) + \hat{\mathbf{B}} \quad (40)$$

の様なマトリックス方程式が得られる。ただし，$\mathbf{A}, \hat{\mathbf{B}}$は次の様なマトリックスである。

$$\mathbf{A} \equiv$$

$$\begin{bmatrix} 0, \dfrac{\alpha_T^B(1)}{\alpha_T^B(0)+C^{*B}(1)+r}, 0 & & & \\ \dfrac{C^{*B}(1)}{\alpha_T{}^B(1)+C^{*B}(2)+r}, 0, \dfrac{\alpha_T^B(2)}{\alpha_T^B(1)+C^{*B}(2)+r}, & & & \\ \ddots & \dfrac{C^{*B}(B-2)}{\alpha_T^B(B-2)+C^{*B}(B-1)+r}, 0 & & \\ & & \dfrac{C^{*B}(B-1)}{\alpha_T^B(B-1)+C^{*B}(B)+r}, 0 & \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\hat{\mathbf{B}} \equiv col$$

$$\left[\frac{\mu\Delta\alpha_T^B(1) - \nu\Delta C^{*B}(1)}{\alpha_T^B(0)+C^{*B}(1)+r}, \cdots, \frac{\mu\Delta\alpha_T^B(B) - \nu\Delta C^{*B}(B)}{\alpha_T^B(B-1)+C^{*B}(B)+r}\right] \quad (42)$$

ただし，$\hat{\mathbf{B}} > 0, \mu > \nu > 0$である。

これより，(40)式を用いれば，$\mathbf{u}^B(x)$は

$$\mathbf{u}^B(x) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot \hat{\mathbf{B}} \quad (43)$$

と求まる。

即ち，$[\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$が存在すれば，(43)式より$\mathbf{u}^B(x)$が求まることになる。それ故，$[\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}$の存在条件として$\mathbf{A}$のスペクトル半径$\xi(\mathbf{A}) < 1$であれば良いから，$r > 0$であることを考慮すれば，$\mathbf{A}$の各行要素の和が$<1$であれば良い。

$$\frac{\alpha^B(x-1)}{\alpha_T^B(x-1)+\alpha^B(x)+r} + \frac{\alpha_T^B(x)}{\alpha_T^B(x-1)+\alpha^B(x)+r} < 1$$

であれば良いから，$r > 0$であることを考慮すれば

$$\Delta\alpha_T^B(x) < \Delta C^{*B}(x) \quad (44)$$

が得られる。ここで，(44)式を変形すると

$$\alpha_T^B(x) - C^{*B}(x) < \alpha_T^B(x-1) - C^{*B}(x-1) \quad (45)$$

が得られる。

また，(45)式は

$$\begin{aligned} &\alpha_T^B(n+1) - C^{*B}(n+1) \\ &\quad < \alpha_T^B(n) - C^{*B}(n) \\ &\quad < \alpha_T^B(n-1) - C^{*B}(n-1) \end{aligned} \quad (46)$$

と書ける。

この時，トランザクション消滅過程のレート$C^{*B}(n)$は流通過程のレート$\alpha_T^B(n)$より小さい。よって，

$$C^{*B}(n) = \eta_n \alpha_T^B(n), \quad (47)$$

$$\forall 0 < \eta_n < 1 \quad , n = 0,1,2,\cdots,B-1$$

と仮定する。ここで，(47)式を(46)式に代入すると

$$\begin{aligned} &(1-\eta_k)\alpha_T^B(k) \\ &< (1-\eta_j)\alpha_T^B(j) < (1-\eta_i)\alpha_T^B(i) \end{aligned} \quad (48)$$

と変形出来る。ただし，$0 \le i < j < k \le B-1$である。

さらに，

$$1 - \eta_n = \kappa_n \ , n = i, j, k \quad (49)$$

と置くと，(48)式は

$$\kappa_k \alpha_T^B(k) < \kappa_j \alpha_T^B(j) < \kappa_i \alpha_T^B(i) \quad (50)$$

$$0 \le i < j < k \le B-1$$

となる。

これによれば，流通量の増大に伴って，$\alpha_T^B(n)$は減少関数であるから

$$\frac{\alpha_T^B(i) - \alpha_T^B(j)}{j-i} \ge \frac{\alpha_T^B(i) - \alpha_T^B(k)}{k-i} \quad (51)$$

と表される。そこで，次の命題を得る。

【命題－2】：最適性の不等式条件

流通過程$A_T(t)$及びトランザクション消滅過程$C(t)$の制御レートの条件が(18)，(19)式の様に与えられている時，(26)および(27)式の条件を満足すれば，(16)式のコスト関数を最大にする最適解は，(20)式で与えられる$u^*(t)$である。**【終わり】**

以上の様に，本論文では，図1の様なシステムに対して，入力過程と出力過程より流通過程を定義し，流通の収益を最大にする問題を考えた時，待ち行列容量の制限付条件のもとで，ある定常最適解が存在する条件が求められた。(最適性の不等式条件)

即ち，この不等式条件は，次の様に説明される。

(50)式において $\eta_k\alpha_T^B(k)>\eta_{k+1}\alpha_T^B(k+1)$ が，すべての $k, 1\le k\le B-1$ に対して成立する。ただし，$B\ge 1$ の正の整数である。これは，流通量の増大に伴って，待ち行列系におけるスループットが全体として減少することを意味している。また，同様に(51)式においては

$$\frac{k}{\kappa_k\alpha_T^B(k)}\le\frac{k+1}{\kappa_{k+1}\alpha_T^B(k+1)}$$

が，すべての k，$1\le k\le B-1$ に対して成立するから，これは流通量の増大に伴って，待ち行列の時間遅れが全体として増加することを意味している。

したがって，(16)式の様な流通収益最大問題においては，流通過程のレートの最適上限値 $\alpha_T^B(i)$，トランザクション消滅過程のレートの最適上限値 $C^{*B}(i), i=1,2,\cdots,B-1$ を制御変数とする時は，全体として流通量が大きくなるに従って，流通過程のレートを減少させる様に選ぶことが十分であるとの結果を得た。

最後に，このことは流通過程においては自明のことの様に見えるが，本研究における様々な条件のもとで，数理的に確かめられた意義は大きいと言える。

3. むすび

本研究においては，図1の様なシステムに対して入出力過程よりあらたに流通過程を考えることにより，流通過程のレートとトランザクション消滅過程のレートを制御変数と考え，システムにおける流通収益最大問題を定常収益問題と考えることにより最適性の条件を導いた。

その結果，この様な最適性の条件が成立するための必要条件として，(35)式のコスト関数の流通量に対する変分式とその存在条件{(44)式}を求めた。この様な問題における制御変数に対する最適上限値は，流通量の増大に伴い少なくとも流通過程のレートを減少させなければならないことが判った。このことは，待ち行列容量の最適上限値と制御変数の最適上限値との相関を見つける上で有用な結果であると思われる。

また，上述の様な制御システムにおいては，入力側制御を可能にするため，上流側にバーチャルキューの存在を仮定したが，このバーチャルキューの定常分布の存在条件についても調べた。これにより，システム全体の評価をするための基礎的考察が可能になる。

【付録－1】

岩波書店の「数学辞典」第3版P217Bより「$f(x),\alpha(x)$ を $[a,b]$ で定義された，実数値をとる有界関数とする。$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ を $[a,b]$ の分割として $\alpha(x)$ に関するRiemannの和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(\alpha(x_{i+1})-\alpha(x_i)),\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$$

を作る。$\max(x_{i+1}-x_i)\to 0$ となるように，分割を細かくしたとき，分割のいかんにかかわらずこの和が一定値に収束すれば，この値を $f(x)$ の $\alpha(x)$ に関するRiemann - Stieltjes積分といい，$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ で表す。Riemann積分は $\alpha(x)=x$ である特別の場合である。」

本論文では，Riemann - Stieltjes積分の中で $\alpha(x)$ を狭義単調増加連続関数で，また $\alpha'(x)$ が存在して連続ならば

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

という公式を活用している。

(15)式：

$$TC(x)=E_x[\int_0^\infty e^{-rt}[bdC(t)+qQ(t)dt]]$$

$$=E_x[\int_0^\infty e^{-rt}bdC(t)]+E_x[q[\int_0^\infty e^{-rt}[x+A_T(t)-C(t)]dt]]$$

$$=E_x[\int_0^\infty be^{-rt}dC(t)]+E_x[q[\left(-\frac{1}{r}\right)e^{-rt}]_0^\infty\int_0^\infty e^{-rt}dA_T(t)]$$

$$-E_x[q[\left(-\frac{1}{r}\right)e^{-rt}]_0^\infty\int_0^\infty e^{-rt}dC(t)]+\frac{q}{r}x$$

$$=E_x[\frac{q}{r}\int_0^\infty e^{-rt}dA_T(t)+(b-\frac{q}{r})\int_0^\infty e^{-rt}dC(t)]+\frac{q}{r}x$$

これより(15)式が得られる。

【付録－2】

(29)式中の $E_x[e^{-rt}V^B(Q(t))]$ を求めるために，次の積

分を考える。

$$\int_0^t e^{-rs}dV^B(Q(s))$$

$$= e^{-rt}V^B(Q(t)) - V^B(Q(0))$$

$$+r\int_0^t e^{-rs}V^B(Q(s))ds \qquad \text{(A1)}$$

(A1)式の両辺に期待値を取ると，

$$E_x\int_0^t e^{-rs}dV^B(Q(s))$$

$$= E_x[e^{-rt}V^B(Q(t))] - V^B(x)$$

$$+E_x\int_0^t re^{-rs}V^B(Q(s))ds \qquad \text{(A2)}$$

$$E_x[e^{-rt}V^B(Q(t))]$$

$$= V^B(x) - E_x\int_0^t re^{-rs}V^B(Q(s))ds$$

$$+E_x\int_0^t e^{-rs}dV^B(Q(s)) \qquad \text{(A3)}$$

(A3)式右辺第三項は，$Q(t)$の上方向と下方向の遷移を分離して表現すると下記の様に展開できる。

$$E_x\int_0^t e^{-rs}dV^B(Q(s))$$

$$= E_x\int_0^t e^{-rs}\{[V^B(Q(s)+1)$$

$$-V^B(Q(s)]dC(s)$$

$$+[V^B(Q(s)-1)-V^B(Q(s)]dA_T(s)\}$$

$$= E_x\int_0^t e^{-rs}[C^{*B}(s)\Delta V^B(Q(s)+1)-$$

$$\alpha_T(s)\Delta V^B(Q(s))]ds \qquad \text{(A4)}$$

よって，(A3)，(A4)式より次式を得る。

$$E_x[e^{-rt}V^B(Q(t))]$$

$$= V^B(x)) + E_x\int_0^t e^{-rs}[C^{*B}(s)\Delta V^B(Q(s)+1)-$$

$$\alpha_T^B(s)\Delta V^B(Q(s)) - rV^B(Q(s))]ds \qquad \text{(A5)}$$

一方，本文の(25)式より以下の式が導かれている。

$$C^{*B}(Q(s))\Delta V^B(Q(s)+1) - \alpha_T^B(s)\Delta V^B(Q(s)) +$$

$$\mu\alpha_T^B(Q(s)) - \nu C^{*B}(Q(s))$$

$$= rV^B(Q(s)) \qquad \text{(A6)}$$

(A3)～(A6)より，本文(29)式が得られる。

【付録－3】

$$Q_s(t) = Q_s(0) + \hat{A}(t) - A_T(t) - D(t) \qquad \text{(A1)}$$

ここで，確率過程

$$Z_t(n) = \mathbf{1}_{\{Q_s(t)=n\}},\quad n = 0,1,2,\cdots \qquad \text{(A2)}$$

を定義する。この時，$Q_s(t)$の確率分布$P_t^S(n)$は

$$P_t^S(n) = E[Z_t(n)] \qquad \text{(A3)}$$

と表される。確率過程$\{Z_t(n), n = 0,1,2,\cdots\}$は入出力ジャンプにより決まるから

$$Z_t(n) = Z_0(n) + \int_0^t f_s(n)ds + m_t \qquad \text{(A4)}$$

と表される。この時，確率過程$Z_t(n)$は計数過程，$f_t(n)$はF_t－更新過程(1)，m_tは局所マルチンゲールを表している。

それゆえ，(A1)式において

$$f_t(n) = \{Z_t(n)\mathbf{1}_{(n>0)} - Z_t(n)\}\hat{\alpha}$$

$$-\{Z_t(n-1)\mathbf{1}_{(n>0)} - Z_t(n)\}\alpha_T^B(m)$$

$$+\{Z_t(n+1) - Z_t(n)\mathbf{1}_{(n>0)}\}d \qquad \text{(A5)}$$

$$n = 0,1,2,\cdots,\quad m = 0,1,2,\cdots,B$$

が得られる。

また，局所マルチンゲールm_tは

$$m_t = M_t^\lambda + M_t^A \qquad \text{(A6)}$$

$$M_t^\lambda = \int_0^t \{Z_{s^-}(n-1)\mathbf{1}_{(n>0)}$$

$$-Z_{s^-}\}(d\hat{A}(s) - \hat{\alpha}ds)$$

$$-\int_0^t \{Z_{s^-}(n-1)\mathbf{1}_{(n>0)} - Z_{s^-}(n)\}$$

$$(dA_T(s) - \alpha_T^B(m)ds) \qquad \text{(A7)}$$

$$M_t^A = \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n)1_{(n>0)}\}$$

$$(dD(s) - dds) \qquad \text{(A8)}$$

と表される。ただし，(A7)，(A8)においてs^-は各時点sの

直前の値であり，各被積分項はs^-によって定まるF_t－可予測過程であり，有界である。

ここで，(A7)，(A8)を用いて(A5)の両辺に$E[\cdot]$の演算を実行すると

$$\frac{d}{dt}[P_t^s(n)]$$

$$=-\{\hat{\alpha}-\alpha_T^B(m)+d\cdot 1_{(n>0)}\}P_t^s(n)$$

$$+\{\hat{\alpha}\cdot\mathbf{1}_{(n>0)}-\alpha_T^B(m)\}P_t^s(n-1)$$

$$+dP_t^s(n+1) \qquad \text{(A9)}$$

となる。

ただし，$t>0, n=0,1,2,\cdots, m=0,1,2,\cdots,B$である。

即ち，(A9)式は，コルモゴロフの方程式を表している。これより，(A9)式の定常分布は

$$P^s(n)=\left[\frac{\hat{\alpha}-\alpha_T^B(m)}{d}\right]^n\cdot P^s(0) \qquad \text{(A10)}$$

と求まる。

ただし，$n=0,1,2,\cdots, m=0,1,2,\cdots,B$である。

(平成12年01月17日受付，平成12年08月07日再受付)

文　　献

(1)Bremaud P: : "Point Process and Queues Martingale Dynamics" pp83-121, Springer-Verlag New York Inc.(1981)。

(2)LODE LI : "A Stochastic Theory of The Firm" Mathematics of operations research,Vol13, No3, August 1988。

(3)箕輪弘之：「トークンリング型ネットワークのジャンプタイプ確率微分方程式を用いたモデル化」電子情報通信学会論文誌, B-1, Vol.J78-B-1, No.7 pp272-PP278, 1995年7月

(4)宮沢政清：「確率と確率課程」p90，近代科学者(1993)

(5)A.SEGALL and T.KAILATH "The Modeling of Randomly B. Modulated Jump Process",IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-21, NO.2, pp.135-143, MARCH 1975

(6)HONG CHEN and DAVID D. YAO "Optimal Intensity Control of a Queueing System with State-Dependent Capacity Limit",IEEE Transactions Automatic control,vol.35,NO.4,pp459-pp464,APRIL,1990

(7)川島幸之助・町原文明・高橋敬隆・斎藤 洋：「通信トラフィック理論の基礎とマルチメディア通信網」p97，電子情報通信学会，1995年11月

(8)白井・天野・井上：「衝突を考慮したC／S型ネットワークのジャンプ型確率微分方程式を用いたモデル化」９６年１１月電気関係学会関西支部連合大会

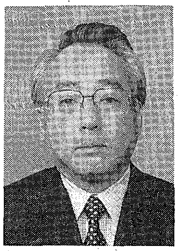
(9)白井・天野・井上：「フレーム衝突を含む一般化C／S型ネットワークのモデル化および定常分布」９７年３月，信学春季全大

(10)白井・天野・井上：「C／S型ネットワークシステム最適評価関数について」1997年9月，信学秋季全大

(11)白井・天野・井上：「トランザクション消滅のあるシステムの定常解析」1998年10月，電気学会論文誌 Vol.118-C。

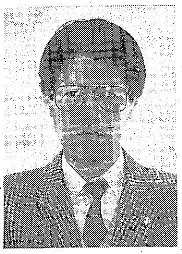
(12)日本数学会：「岩波数学辞典」第3版，P217B，岩波書店，1998年9月

白井　健二（正員）



昭50年立命館大学大学院修士課程了。確率モデルおよび最適制御に関する研究に従事。現在，(株)情報工房代表取締役社長。計測自動制御学会，電子情報通信学会，日本航空宇宙学会各会員。博士(工学)

天野　佳則（非会員）



昭52年立命館大学大学院博士課程了。分布定数系の最適制御に関する研究に従事。現在，(株)京南エレクス専務取締役。計測自動制御学会会員。工学博士。

井上　和夫（正員）

昭41年大阪大学大学院博士課程了。適応制御，ヒューマンインターフェースに関する研究に従事。現在，立命館大学理工学部情報学科教授。システム制御情報学会，電子情報通信学会，IEEE各会員。工学博士。