

情報ネットワークにおける サーバの輻輳回復率に関する一考察

A study on the recovery rate of congestion in the network server

白井 健二^{*1}・天野 佳則^{*2}

要約

本研究では、情報ネットワークにおけるサーバの輻輳および非輻輳状態を評価することを目的としている。分散の大きな入力データが、サーバに輻輳をもたらすことはよく知られている。サーバの輻輳状態および輻輳からの回復状態を評価するために、ファイナンス理論におけるオプション評価理論およびリスク中立化を応用することを提案する。リスクが、サーバの輻輳状態に対応すると考える。また、輻輳状態を評価するために、入力パケットの獲得確率を導入する。非輻輳状態から輻輳状態への転移の解析には、オプション評価における経路依存型オプション契約の解析手法を活用する。理由は、対数正規過程におけるサーバに関して、非輻輳から輻輳への転移に相当すると考えるからである。最後に、数値例を挙げて輻輳状態から非輻輳状態へ回復するときの平均と分散比を提示する。そのときの輻輳回復評価の数値例もあわせて報告する。

キーワード：獲得確率，対数正規型確率微分方程式，リスク中立化，ブラックショールズ方程式

1 まえがき

数理ファイナンスの金融，経済への活用は盛んである。金融における株価の変動，円・ドルの為替変動の時間的変動が，ある条件のもとで確率微分方程式で記述できることはよく知られている [1, 2, 3, 4]。筆者等は，ある情報ネットワークの n 個の並列サーバのキューイングされたパケットの変動出力側から捉えた場合，各々の n 個のキューに存在するパケットの変動を伊藤型確率微分方程式で記述できることを報告した [5]。その中で，最適なパケット配分を，数理ファイナンスにおけるポートフォリオの考え方を導入してパケットの最適配分法を報告した [5]。システムの最適問題としては，対象システムに流入するパケットが，出力側へ最大限に送出される制御問題を定式化し最適制御関数を導いた。その結果，入力パケットのロス確率及び獲得確率を定義することにより，獲得確率の変動が伊藤型確率微分方程式に従うものとすれば，最適配分係数は，獲得確率（ロス確率）の確率的性質にのみ依存することを明らかにした。また，定常モデルにおいて最適な配分係数を求めている。この研究は，数理ファイナンスにおけるポートフォリオの考え方を工学的問題に適用した研究成果である [5]。

本研究では，情報ネットワークにおけるサーバの輻輳および非輻輳状態を評価することを目的としている。分散の大きな入力データが，サーバに輻輳をもたらすことはよく知られている。サーバの輻輳状態および輻輳からの回復状態を評価するために，入力パケットの獲得確率を定義することにより，ファイナンス理論におけるオプション評価理論およびリスク中立化を応用することによって，サーバの輻輳および非輻輳状態を評価することを提案する [1, 2, 3, 4]。サーバキューイングにおけるリスクとは，輻輳状態に対応すると考える。輻輳状態を評価するために，入力パ

^{*1} SHIRAI, Kenji [情報システム学科]

^{*2} AMANO, Yoshinori [(株)京南エレクトクス]

ケットの獲得確率を導入する。非輻輳状態から輻輳状態への転移の解析には、オプション評価における経路依存型オプション契約の解析手法を活用する[6, 7]。理由は、対数正規過程におけるサーキューイングに関して、非輻輳から輻輳への転移に相当すると考えるからである。

文献[9]は、将来の無線通信ネットワーク網の構築に向けて、GPS(Global Positioning System)測定装置を利用して4種類の移動体の通話トラフィックを統計的に比較している。4種類の移動体は、都市間を走行するバス、保養向けの自動車、荷物運送トラック、およびタクシーである。4種類それぞれのセル内滞留時間を測定した結果、4種類の累積分布は、対数正規分布で近似することが適切と報告されている。

最後に、数値例を挙げて輻輳状態から非輻輳状態へ回復するときの平均と分散比を提示する。そのときの輻輳回復評価の数値例もあわせて報告する。

2 サーバの輻輳回復評価

2.1 問題の記述

図1のようなある情報ネットワークにおいて、システムのゲートに到着するパケットが一部ゲートでリジェクトされる事を考慮している。ゲートを通過したパケットは、 N 個の並列 $M/M/1$ のネットワークに分配される。筆者等は、ゲートまでの入力パケットを「ポテンシャルインプット」と呼ぶ[8]。ポテンシャルインプットとは、リジェクトされるパケットを含む。ゲートを通過したパケットを「アクチュアルインプット」と呼ぶ[8]。アクチュアルインプットとは、すべてのパケットがキューイングサーバに入力されることをいう。本システムでの評価目的は、このポテンシャルインプットの獲得量が最大になる様に、各システムルートにおける配分係数 ϕ を決定している。あるネットワークにおいて、システムに到着するパケットが、時刻 $T_q, q = 1, 2, \dots$ をレート $\hat{\alpha}(t)(> 0)$ のポアソン点過程、リジェクトされるパケットが、時刻 $\{T_r^*, r = 1, 2, \dots\}$ でリジェクトされ、かつそのレートを $\gamma(t)(> 0)$ のポアソン点過程、システムの出パケットは、時刻 $\{T_q, q = 1, 2, \dots\}$ で出力し、かつそのレートを $\alpha(t)$ のポアソン点過程とする。

図2で使われている変数の確率空間について記述する。確率空間 (Ω, F) は可測空間であり、 I は、 $[0, \infty)$ として時間区間を表す。また、確率空間 (Z_t, F_t, P) 、 $t \in I$ と表され、 P は、 (Ω, F) における確率測度、 (F_t) は増大する σ -集合体の族であり、 (Z_t) は、 (F_t) に適合するランダム変数の族である。

ここで、 $\{A(t), t \geq 0\}$ はポテンシャルインプットを表す計数過程(確率過程)とする時、 $A(t)$ の計数過程は次式で記述できる [5, 8]。

$$\hat{A}(t) = \sum_{q \geq 1} \mathbf{1}_{T_q \leq t}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

また、アクチュアルインプット $A(t)$ の計数過程は、次のように表される [5, 8]。

$$A(t) = \sum_{q \geq 1} \mathbf{1}_{T_q \leq t}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

ただし、各ルートにおける入力は、次式となる。

$$A_i(t) = \phi_i(t)A(t), \quad (2.3)$$

ただし、 $\phi_i(t)$ は確率であるから、次式を得る。

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(t) = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

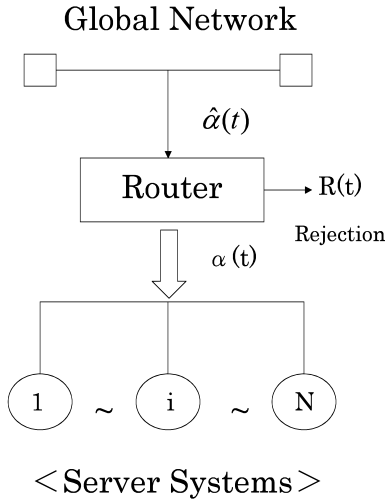


図1 システム概念図

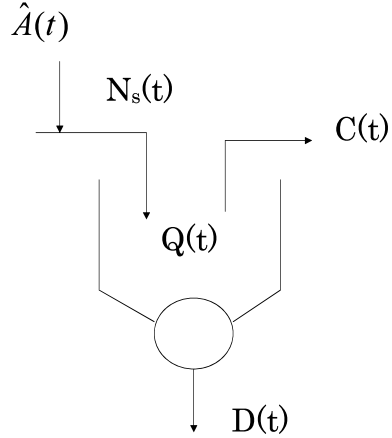


図2 単一サーバモデル

サーバに入力される前にリジェクトされるパケットの点過程は、次式となる。

$$\{T_r^* = \{T_1^*, T_2^*, \dots\}\} \in T^*. \quad (2.5)$$

リジェクトされるパケットの計数過程は次式となる [5, 8]。

$$R(t) = \sum_{r \geq 1} \mathbf{1}_{(T_r^* \leq t)}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

また、キューイングバッファの容量を超える消滅パケットの計数過程は次式となる。

$$C(t) = \sum_{r \geq 1} \mathbf{1}_{(C_r \leq t)}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

ここで、上記指示関数 $\mathbf{1}_{(\bullet)}$ は、集合 $\{\bullet\}$ 上で1、それ以外では0の値をとる指示関数である。例えば、 $\sum_{r \geq 1} \mathbf{1}_{(T_r^* \leq t)}$ は、時刻 $\{0 < T_q < t\}$ で $\{T_q\}$ の個数をカウントしている [5, 8]。

そこで、システムの計数過程モデル式は次式で表せる。

$$A(t) = \hat{A}(t) - R(t) - C(t) \quad (2.8)$$

ここに、 $R(t)$ は入力側で制御されるリジェクション。 $C(t)$ は、各ルートにおけるパケットの消滅を表している [5, 8]。

この計数過程モデルは、ポテンシャルインプット、アクチュアルアウトプットおよびリジェクトされるパケットをそれぞれ独立した確率過程とした待ち行列で表現している。連続時間下でのパケットの動作をより忠実に表現出来るところに、計数過程の利点がある。ここで、独立性の仮定については、文献 [5] で述べている様に、入出力過程とリジェクトされるパケットの確率過程を、それぞれ独立したポアソン過程と仮定しても、現実のシステムとの差異はないと考える。

ここで、各ルートにおける消滅パケットのレートを $C_i^*(t)$ とおくと、この $C_i^*(t)$ は各ルートにおけるキューイングのパラメータ（例えば、dead time τ_i 、サービスレート μ_i ...）に依存するものとし、その消滅確率（ロス確率）を $P_i(\varphi_i(t))$ と表す。ただし、 $\varphi_i \equiv \{\tau_i, \mu_i, \dots\}$ 、 $i = 1, 2, \dots$ とおく。このとき、 $P_i(\varphi_i(t))$ に対応して獲得確率を $f_i(\varphi_i(t))$ とあらわし、次のように定義する。

定義 1 獲得確率の定義 [5]。

$$f_i(\varphi_i(t)) = 1 - P_i(\varphi_i(t)), \quad (2.9)$$

ただし、 $i = 1, 2, \dots, N$ である。

ここで、アクチュアル入力過程のレート $\alpha(t)$ の変動をとらえる事により、その動的モデルを次式で表す。

$$d\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) \alpha(t^-) df_i[\varphi_i(t)], \quad (2.10)$$

ただし、 $\alpha(t^-) = \lim_{s \uparrow t} \alpha(s)$ 、 $\phi_i(t) \equiv \phi_i$ (定数) である。ここで、(2.10) 式において、 $\alpha(t^-) df_i[\varphi_i]$ は (i) サーバにおける獲得量の変動を表している。

このとき、 $f_i[\varphi_i(t)]$ は、伊藤型確率微分方程式にしたがい変動するものとするれば、次のようになる。

$$df_i[\varphi_i] = a_i(t) f_i[\varphi_i] dt + b_i(t) f_i[\varphi_i] dZ_i(t). \quad (2.11)$$

いま、 $\alpha(t)$ は次式のように表せる [5]。

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) \alpha(t^-) f_i[\varphi_i], \quad (2.12)$$

ただし、 $\sum_{i=1}^N \phi_i(t) = 1$ である。

さて、(i) サーバの輻輳について記述する。

仮定 1 $\tau_i^q = \min\{t : Q_i(t) \geq D_i(t)\}$ となる τ_i^q が存在することただし、 $t > 0$ である。

一方、 $f_i(t)$ を用いると、次のように仮定する。

仮定 2 $\tau_i^f = \min\{t : f_i(t) \leq d_i(t)\}$ となる τ_i^f が存在することで、ただし、 $t > 0$ である。

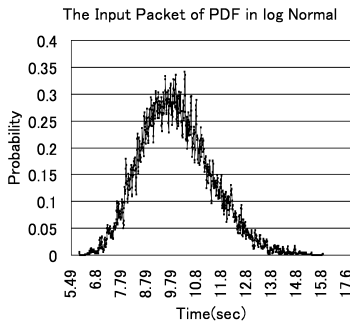


図 3 対数正規型確率密度入力パケット

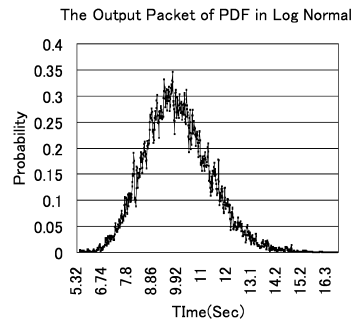


図 4 対数正規型確率密度出力パケット

すなわち、図 6 によれば仮定 1 は、(i) サーバのキューイング量がある設定量 $D_i(t)$ を超過した時のことをいう。同様にして、仮定 2 は、(i) サーバの獲得レートが時点 τ_i^f において設定値 $d_i(t)$

を下回った時のことをいう。このことは、次のように考えられる。もし、サーバへの入力バースト過程が付加してくると、キューイング量が増加し、獲得レートが低下してくる。これについて、あるサーバにおいて入力の注入率を大きくすると、キューイング量が増大し、それとは逆に獲得レートが低下し、ある注入点で非輻輳から輻輳への相転移が起こるらしいという報告がある[10, 11, 12]。これから考えても、本研究における仮定には妥当性があると思われる。また、次のようにも考えられる。入力バーストの増大とともにパケット消滅[5]が増大する。その結果、獲得レートが低下し、キューイング量 $Q(t)$ は $rQ(t)$ ($0 < r < 1$) へ減少する。

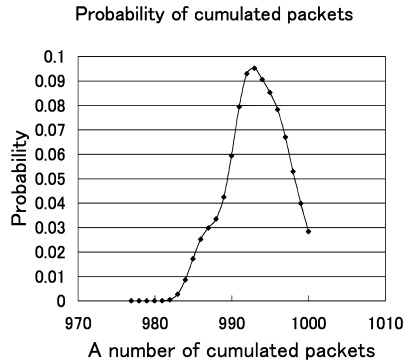


図5 サーバ内累積キューの確率密度分布

そこで、本研究では、サーバの輻輳を定義し、さらに輻輳回復率 $\delta(t)$ を定義し、ファイナンス理論を応用することにより、このような輻輳発生時のシステム評価について考えることにする。対象としているサーバのキューイング過程のモデル式を次式で表す。

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dZ(t). \tag{2.13}$$

獲得レートのモデル式を次式で表す [3]。

$$\frac{df(t)}{f(t)} = \mu_f(t)dt + \sigma_f(t)dZ(t), \tag{2.14}$$

ただし、 $f(t)$ は $\sigma(Q(s), \rho(s); s \leq t)$ 可測であるとする。

2.2 単一サーバの対数正規型入出力およびキューイングのシミュレーション

ここで、サーバへのパケット発生時間間隔入力および出力を対数正規型確率密度関数としてサーバ内の受信用キューイングバッファ内に存在する累積パケット個数の確率密度関数をシミュレーションした結果が、図3～図5である。ただし、サーバへの入力とサーバからの出力は、独立した確率過程としている。シミュレーションに関する設定条件は、入出力ともに、対数正規型確率密度関数は、平均が10、分散を2とした。キュー内には、当初1,000個のパケットが存在している状態でシミュレーションを実施している。

2.3 サーバ輻輳回復解析

いま、輻輳状態を図6のように表す。図6によれば、獲得レート $f(t)$ の初期値 $f(0) = f_0$ から出発した獲得レート過程が時点 τ_i^f において設定値 d_i に到達している（輻輳）。

よって、 d_i は次式となる。

$$d_i = \min_{0 \leq \tau \leq t} f(\tau) \quad (2.15)$$

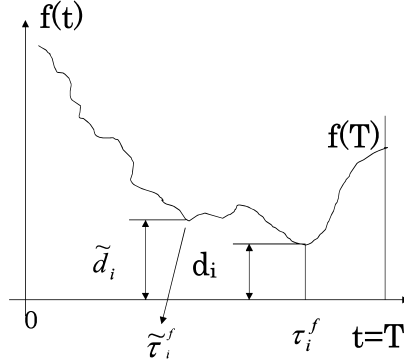


図6 サーバキューイングの輻轉状態

それゆえ、 τ_i^f の評価を次のようにする。

$$\begin{aligned} \tau_i^f &= \min_{\tau_i \in [0, T]} [f(\tau_i) - d_i \mid f(0) = f_0] \\ &= \max_{\tau_i \in [0, T]} [\tilde{d}_i - f(\tau_i) \mid f(0) = f_0] \end{aligned} \quad (2.16)$$

ただし、 \tilde{d}_i は第1下限、 d_i は第2下限と呼ぶ。この評価は、非輻轉状態から、前述した入力パースト等の影響により輻轉状態へ転移した後、最初に \tilde{d}_i に到達する。その後、完全に輻轉に転移すると再度 d_i に到達する。このとき、 \tilde{d}_i への到達は確定的であり、 d_i への到達は確率的である[7]。

このように、輻轉状態は過去の $f(t)$ の経路に依存するものと仮定する。ここで、第1下限到達時点を $\tilde{\tau}_i^f$ 、第2下限到達時点を τ_i^f とおくと、それぞれ

定義2 $\tilde{\tau}_i^f$ の定義。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tilde{\tau}_i^f \leq t, \\ t &< \tau_i^f \leq T \end{aligned} \quad (2.17)$$

それゆえ、 $\tilde{\tau}_i^f$ 、 τ_i^f は、それぞれ次のように定義できる。

$$\tilde{\tau}_i^f = \max_{0 \leq \tilde{\tau}_i \leq t} [\tilde{d}_i - f(\tilde{\tau}_i) \mid f(0) = f_0] \quad (2.18)$$

$$\tau_i^f = \max_{t < \tau_i \leq T} [d_i - f(\tau_i) \mid f(0) = f_0] \quad (2.19)$$

このとき、 \tilde{d}_i 、 d_i は、次のように評価できる。

$$\tilde{d}_i = \min_{0 \leq \tilde{\tau}_i \leq t} f(\tilde{\tau}_i), \quad (2.20)$$

$$d_i = \min_{t < \tau_i \leq T} f(\tau_i), \quad (2.21)$$

ファイナンスでいうルックバックオプションの下で期待される利得は、次式で表される [7]。

$$f(T) - \min\{\tilde{d}_i, d_i\} \quad (2.22)$$

サーバにおけるルックバックオプションとは、期末におけるキューイング量がサーバ内処理へのパケット出力量を価値の評価と見る。

したがって、時刻 t でのコールオプションの価格 $\Theta[f(t), \tilde{d}_i]$ は、リスク中立化法より、 $\tau = T - t$ とおくと、輻輳評価は、ファイナンス理論を応用すると次のようになる [7]。

$$\begin{aligned} \Theta(f, \tilde{d}_i) &= e^{-r\tau} E[\tilde{f}(T) - \min\{\tilde{d}_i, d_i\} | f(t) = f_0] \\ &= e^{-r\tau} E[\tilde{f}(T) - \tilde{d}_i | d_i > \tilde{d}_i] P\{d_i > \tilde{d}_i\} + E[\tilde{f}(T) - d_i | d_i \leq \tilde{d}_i] P\{d_i \leq \tilde{d}_i\} \\ &= e^{-r\tau} (E[\tilde{f}(T) | f(t) = f_0] - \tilde{d}_i \cdot P\{d_i > \tilde{d}_i\} - E[d_i | d_i \leq \tilde{d}_i] P\{d_i \leq \tilde{d}_i\}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は、リスク中立化により平均 $(r - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau$ 、分散 $\sigma_f^2\tau$ の場合の期待値演算を表している。

ここで、期待値 E は、リスク中立化した期待値で平均 $(r - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau$ 、分散 $\sigma_f^2\tau$ の正規分布に関する期待値演算を施す。 r は、リスク中立でのレートを表し、 $r - \frac{\sigma_f^2}{2} \leq \mu_f$ を満たす値である。一方、対数正規過程における d_i の分布関数は次式となる。

$$\begin{aligned} F(d_i) &= P(\tilde{d}_i \leq d_i) \\ &= \Phi\left[\frac{\ln(d_i/f_0) - (r - \frac{\sigma_f^2}{2})T}{\sigma_f\sqrt{T}}\right] + \left(\frac{f_0}{d_i}\right)^{(-2r/\sigma_f^2)} \times \Phi\left[\frac{\ln(d_i/f_0) + (r - \frac{\sigma_f^2}{2})T}{\sigma_f\sqrt{T}}\right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

ここで $\Phi(\cdot)$ は、平均零、分散 t の正規分布である [7]。

それゆえ、計算を省略して結果を書くとき次式を得る。

$$\begin{aligned} \Theta[f, \tilde{d}_i] &= e^{-r\tau} E[f(\tau) - \min\{d_i, \tilde{d}_i\} | f_i(t) = f_0] \\ &= f_0 - \tilde{d}_i e^{-r\tau} \{\Phi(d_1) - V\Phi(d_2)\} - f_0 \left(1 + \frac{\sigma_f^2}{2r}\right) \Phi(d_3), \end{aligned} \quad (2.25)$$

詳しい式の導出過程については文献 [7] を参照してください。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln(\tilde{d}_i/f_0) + (r - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f\sqrt{\tau}} \quad (2.26)$$

$$d_2 = \frac{-\ln(\tilde{d}_i/f_0) + (r - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f\sqrt{\tau}} \quad (2.27)$$

$$d_3 = \frac{-\ln(\tilde{d}_i/f_0) - (r + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f\sqrt{\tau}} \quad (2.28)$$

$$V = \frac{\sigma_f^2}{2r} \left(\frac{f_0}{d_i}\right)^{1 - \frac{2r}{\sigma_f^2}} \quad (2.29)$$

すなわち、この評価値は期間中の最小値 $\{d_i, \tilde{d}_i\}$ と期末の値 $f(\tau)$ との差として表されている。ここで、輻輳回復評価率として次式を定義する。

定義 3

$$\delta(t) = \frac{\Theta[f, \tilde{d}_i]}{\min\{d_i, \tilde{d}_i\}} \quad (2.30)$$

これより、次のことがわかる。

$\delta(t) > 0$: 輻輳状態。

$\delta(t) < 0$: 非輻輳状態。

表1 臨界回復率の計算例 ($\mu_f = 0.08$)

σ_f^2	$\delta_{cr}(T)$
0.01	-0.91
0.02	-0.976
0.021	-0.943
0.022	-247.8
0.024	826.99
0.026	19.392
0.028	5.099
0.030	2.457
0.032	1.572
0.034	1.158

表2 臨界回復率の計算例 ($\sigma_f^2 = 0.1$)

μ_f	$\delta_{cr}(T)$
0.2	0.885
0.22	1.107
0.24	1.224
0.26	2.439
0.28	4.848
0.30	14.5
0.32	117.08
0.36	-223.87
0.38	-1.737
0.40	-0.655

2.4 数値計算例

つぎに、 $[\mu_f \equiv \text{固定}, \sigma_f^2 : \text{変数}]$ の場合と $[\sigma_f^2 \equiv \text{固定}, \mu_f : \text{変数}]$ とした場合の臨界回復率の計算を行うと図7, 図8のようになる。

表2.4では、 $\mu_f = 0.08$ として σ_f を変化させた場合であり、表2.4では、 $\sigma_f^2 = 0.1$ として μ_f を変化させた場合の臨界回復率の値である。

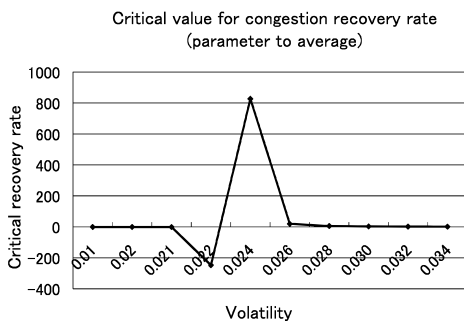


図7 分散値に対する臨界回復率の値 ($\mu_f = 0.08$)

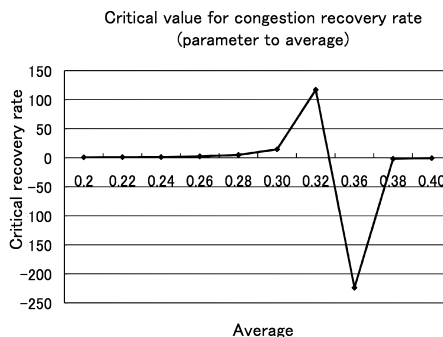


図8 平均値に対する臨界回復率の値 ($\sigma_f^2 = 0.1$)

いま、表2.4, 表2.4および図7, 図8から、つぎのようなことが推測される。

- (i) $\mu_f \equiv \text{const}$ の場合、ある σ_f^2 の時点で期末において、 δ_{cr} が急速に回復される。
- (ii) $\sigma_f^2 \equiv \text{const}$ の場合、 δ_{cr} は μ_f の影響をあまり受けない。

すなわち

$$\delta_{cr}(T) = \frac{\Theta(f, \tilde{d}_i : T)}{\min\{\tilde{d}_i, d_i\}} \gg 0, \tag{2.31}$$

表3 図.9 での Type 1~6 で使用した $d_i, f, \mu_f, \sigma_f^2$ の設定値

Type	d_i	f	μ_f	σ_f^2
Type 1	0.2	0.7	0.7	1.0
Type 2	0.2	0.7	0.5	1.0
Type 3	0.2	0.7	0.5	1.1
Type 4	0.2	0.7	0.5	1.5
Type 5	0.5	0.5	0.7	1.0
Type 6	0.7	0.5	0.7	1.0
Type 7	0.8	0.5	0.7	1.0

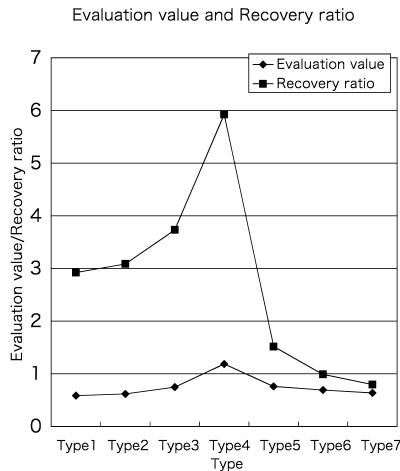


図9 輻轉評価値および回復率の評価

となり、 μ_f と σ_f^2 の比は

$$\frac{\sigma_f^2}{\mu_f} \cong 0.33 \sim 0.37. \tag{2.32}$$

となる。さらに、 $\Theta(f, \tilde{d}_i)$ の評価値と輻轉回復率の計算を図9において示している。式 (2.23) で示す $\Theta(f, \tilde{d}_i)$ は、期末時刻における評価値を示す。輻轉回復率は、期末時刻での式 (2.30) の値、つまり $\Theta(f, \tilde{d}_i)/d_i$ での計算結果である。 d_i は最小値、つまり $f = d_i$ と設定して計算している。ここでは、つぎのことが説明できる。

すなわち、 (f/d_i) が大きいほど、 $\delta_{cr}(T)$ は大きくなり、 (f/d_i) が同じ値の場合、 σ_f^2 が大きいほど、 $\delta_{cr}(T)$ が大きくなることわかる。このことは、工学的には自明であり、本研究の成果が工学的に意味のあるものであると判断できる。なぜなら、前者は、輻轉状態設定値より現在値が大きいほど、輻轉回復評価が大きいことを意味している。

後者は、獲得レートに対するリスク、すなわち、分散 σ_r^2 を大きくとるほど、輻輳回復評価値がおおきくなる。これは、ファイナンス理論におけるリスクを大きくとるほど、評価が大きくなることより自明であるが、工学的には、意図的に分散を大きくとることはなく、前者における工学的効果が大きいと思われる。

3 むすび

本研究では、サーバの輻輳状態および輻輳からの回復状態を評価するために、入力パケットの獲得確率を定義することにより、ファイナンス理論を応用することができることを提案する。サーバキューイング系のモデルとして対数正規型確率微分方程式に従うものとする。筆者等は、獲得確率を導入することにより輻輳から非輻輳への回復評価ができることを報告した。

数値例を挙げて輻輳状態から非輻輳状態へ回復するときの平均と分散比を提示した。そのときの輻輳回復評価の数値例もあわせて報告した。この輻輳状態から非輻輳状態へ回復するときの平均と分散比を活用することにより、サーバの輻輳状態を事前に評価できると考える。

参考文献

- [1] Paul Wilmott : Derivatives ; John Wiley & Sons, 1998
- [2] Black, F. and Scholes, M : The Pricing of Options and Corporate Liabilities ; Journal of Political Economy, vol. 81, pp. 637-654, (1973)
- [3] Merton, R: Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model ; Journal of Economic Theory, vol. 3, pp. 373-413, (1971)
- [4] Amin, K.I and Jarrow, R.A : Pricing options on risky assets in a stochastic interest rate economy ; Mathematical Finance, vol. 2, pp. 217-237, (1992)
- [5] 白井, 天野, 井上 : トランザクション消滅のある待ち行列系の最適配分法—ファイナンス論的アプローチ— ; 電気学会論文誌, pp. 453-463, vol. 120-C, No. 4, (2000)
- [6] Yue-Ken Kwok : Models of Financial Derivatives ; pp. 267-278, Springer Finance, 2002
- [7] 池田昌幸 : 経路依存型オプション契約の評価について ; ファイナンス研究, No. 13, pp. 1-19, February, (1991)
- [8] 白井, 天野, 井上 : トランザクション消滅のあるシステムの定常解析 ; 電気学会論文誌, pp. 1485-1492, Vol. 118-C, No. 4, (1998)
- [9] H. Hidaka, K. Saitoh, N. Shinagawa, T. Kobayashi : Teletraffic Characteristics of Cellular Communication for Different Types of Vehicle Motion ; IEICE Trans. commu., pp. 558-564, Vol. E84-B, No. 3, 2001
- [10] M. Takayasu, K. Fukuda, and H. Takayasu : Application of Statistical Physics to the Internet Traffics ; Physica A 274, pp. 140-148, (1999)
- [11] M. Takayasu, H. Takayasu, and K. Fukuda : Dynamic Phase Transition Observed in the Internet Traffic Flow ; Physica A 277, pp. 248-255, (2000)
- [12] M. Takayasu, H. Takayasu, T. Sato : Critical behaviour and 1/f noise in information traffic ; Physica A 233, pp. 824-834, 1996

付録 A 付録 1

ここでは、文献 [4, 5, 7] に準じて計算を実行する。

いま、(2.23) 式、右辺第 3 項において、(2.24) 式を用いると

$$\begin{aligned}
 & E[\tilde{d}_i \leq d_i] \cdot P(\tilde{d}_i \leq d_i)] \\
 &= \int_0^{d_i} lF(l) \\
 &= d_i F(d_i) - \int_0^{d_i} \Phi\left(\frac{\ln(l/f) - (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) dl - \int_0^{d_i} \left(\frac{f}{l}\right)^{(1-2\mu_f)/\sigma_f^2} \Phi\left(\frac{\ln(l/f) + (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) dl \\
 &= d_i \left\{ \Phi + \left(\frac{\ln(l/f) - (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) + \left(\frac{f}{d_i}\right)^{-(2\mu_f - \sigma_f^2)/\sigma_f^2} \times \Phi\left(\frac{-\ln(l/f) + (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right\} \\
 &\quad - d_i \Phi\left(\frac{-\ln(l/f) - (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) + f e^{\mu_f \tau} \Phi\left(\frac{-\ln(l/f) - (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) - f \left(\frac{f}{d_i}\right)^{-2\mu_f/\sigma_f^2} \cdot \frac{\sigma_f^2}{2\mu_f} \\
 &\quad \times \left\{ \Phi + \left(\frac{\ln(l/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) - e^{\mu_f \tau} \left(\frac{f}{d_i}\right)^{-2\mu_f/\sigma_f^2} \times \Phi\left(\frac{\ln(l/f) - (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right\} \quad (\text{付録 A.1})
 \end{aligned}$$

となるから、(2.23) 式より

$$\begin{aligned}
 & \Theta(f, d_i) \\
 &= f - e^{-\mu_f \tau} \left\{ d_i \left[\Phi\left(\frac{\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) + \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) - (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{f}{d_i}\right)^{1-\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}} \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) - \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) - (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - f \left(\frac{f}{d_i}\right)^{-2\mu_f/\sigma_f^2} \cdot \left(\frac{\sigma_f^2}{2\mu_f}\right) e^{\mu_f \tau} \times \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) - (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) + f e^{\mu_f \tau} \Phi\left(\frac{\ln(d_i/f) - (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right\} \\
 &= f - e^{-\mu_f \tau} d_i \left[\Phi\left(\frac{\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) + \left(\frac{f}{d_i}\right)^{1-\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}} \Phi\left(\frac{\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{f}{d_i}\right)^{\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}} \left(\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}\right) \times \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right] - f \left(\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}\right) \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) - (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \\
 &\quad - f \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) - (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \\
 &= f - e^{-\mu_f \tau} d_i \left[\Phi\left(\frac{\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) + \left(\frac{f}{d_i}\right)^{1-\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}} - \left(\frac{f}{d_i}\right)^{-\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}} \left(\frac{\sigma_f^2}{2\mu_f}\right) \right] \\
 &\quad \times \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) - f \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma_f^2}{2\mu_f}\right) \right\} \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) - (\mu_f + \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \quad (\text{付録 A.2})
 \end{aligned}$$

すなわち、(付録 A.2) 式より

$$\begin{aligned}
 & \Theta(f, d_i) \\
 &= f - d_i e^{-\mu_f \tau} \left[\Phi\left(\frac{\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) + \left\{ \left(\frac{f}{d_i}\right)^{1 - \frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}} - \left(\frac{f}{d_i}\right)^{-\frac{2\mu_f}{\sigma_f^2}} \left(\frac{\sigma_f^2}{2\mu_f}\right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. \times \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) + (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \right] - f \left(1 + \frac{\sigma_f^2}{2\mu_f}\right) \Phi\left(\frac{-\ln(d_i/f) - (\mu_f - \frac{\sigma_f^2}{2})\tau}{\sigma_f \sqrt{\tau}}\right) \tag{付録 A.3}
 \end{aligned}$$

となる。