

# 情報ネットワークサーバのキューイングモデル

－ファイナンシャルアプローチ－

*Queuing Network Model of Information System Servers  
- Financial Approach -*

白井 健二\*1 ・ 天野 佳則\*2

## 要約

本研究は、パケットがバッファ内をフロースルーして行く挙動が1次元拡散型の偏微分方程式でモデル化できることを提案する。次に、数理ファイナンスにおけるオプション評価理論であるブラックショールズ式を活用して、サーバの安定評価ができることを提案する。本研究における提案の前提は、次のとおりである。最初は、情報ネットワークサーバに入力されるパケットの発生時間間隔が対数正規型確率密度関数にモデル化できることであり、かつサーバキューイングから独立してパケットを取り出す出力時間間隔を対数正規型確率密度関数にモデル化できる場合に限定する。この前提を確保するために、サーバ内のパケット入力用のキューに存在する累積パケット個数が、対数正規型確率密度関数になるというシミュレーション結果に基づいている。次に、サーバ内のキューイングバッファをフローするパケット挙動とファイナンスにおけるデリバティブズ挙動が、同一の拡散型偏微分方程式で来していることによる。

キーワード：拡散方程式，対数正規型確率密度関数，デリバティブズ，確率微分方程式，固有関数展開法

## 1 まえがき

数理ファイナンスの金融，経済への活用は盛んである。金融における株価変動，円・ドル為替の時間的変動が，ある条件のもとで確率微分方程式で記述できることはよく知られている [1, 2, 3, 4]。

筆者等は工学的問題，特に情報ネットワークにおいて，あるトランザクション入力が， $n$  個の並列サーバの入力キューイングバッファに蓄積されるトランザクションをキューイングバッファの出力側から捉えた場合，各々の  $n$  個のキューに存在するトランザクションの変動を伊藤型確率微分方程式で記述できることを報告した。その中で，最適なトランザクション配分を数理ファイナンスにおけるポートフォリオの考え方を導入してトランザクションの最適配分法を報告した [5, 7, 8]。ここで，サーバキューイングモデルに数理ファイナンスを活用する提案をした根拠は，パケットがバッファ内をフロースルーして行く挙動が1次元拡散型の偏微分方程式で規定できる点にある。数理ファイナンスにおけるオプション評価理論での評価モデル式がブラックショールズ式の偏微分方程式となる。この二つの一致点に注目した。つまり，サーバ内のキューイングバッファをフローするパケット挙動とファイナンスにおけるデリバティブズの挙動が同一式である。

一方，無線ネットワークにおいては，将来の無線通信ネットワーク網の構築に向けて，GPS

---

\*1 情報システム学科 教授

\*2 (株)京南エレクトクス

(Global Positioning System) 測定装置を利用して4種類の移動体の通話トラフィックを統計的に比較している。4種類の移動体は、都市間を走行するバス、保養向けの自動車、荷物運送トラック、およびタクシーである。4種類それぞれのセル内滞留時間を測定した結果、4種類の累積分布は、対数正規分布で近似することが適切と報告されている [6]。

本研究では、情報ネットワークに存在するサーバに入力されるパケットの発生時間間隔が対数正規型確率密度関数であり、かつサーバキューイングから独立してパケットを取り出す出力時間間隔を対数正規型確率密度関数という場合に限定すれば、サーバ内のパケット入力用のキューイング内に存在する累積パケット個数が、対数正規型確率密度関数になるというシミュレーション結果を基にして、数理ファイナンスを活用することにより数理的なモデリングが可能になることを報告する。サーバの安定化状態を解析するために、サーバのキューイング入力側パケットの単位当たりのパケット数とサーバ内キューイング量との間でヘッジを構成する。このようなヘッジを「情報デリバティブズ」と呼ぶことにする。これは上述のようにサーバのキューイング入力過程の変動リスクによるキューイングのリスク安定化であり、言い換えればサーバの状態安定化である。このように、ファイナンス理論を応用すると、このようなシステムの状態が安定化(無リスク化)されるための評価式がB.S(ブラック・ショールズ)方程式で記述できることにある。

## 2 サーバ内キューへの入力パケットモデリング

### 2.1 問題の記述

はじめに、1次元のサーバにおける構成図を図1に示す。サーバ $i-1$ は、その前のリンク(接続)に繋がるサーバからパケットを受信する。受信パケットは、必ずしも論理的に連続したパケットとは限らない。受信されたパケットは、サーバ内の受信用のキュー内に逐次蓄積される。蓄積されたキューを取り出す時は、論理的に意味のあるデータになるように蓄積されたキューイングバッファから取り出す。よって、キュー内には不連続な位置から取り出すこともある。このような形態で取り出されたパケットは、サーバ内で処理される。処理されたパケットは分割されて、送信キューに送られ、サーバ $(i)$ へ送信される。サーバ $(i)$ についても、サーバ $(i-1)$ のサーバ内送受信キューおよびパケット処理と同じとする。また、送受信キューの容量は無量大とする。ここで、サーバ $(i)$ における入力過程のモデル化を考える。そこで、次のような仮定を行う。

- 仮定1** 個々のパケットレートは、1つ前の先行パケットとの間隔のみにより定まる。パケット消滅は、リンク間およびサーバ内では発生しないものとする。
- 仮定2** パケットレートは、パケット発生時点の通信システムの状態により定まる。
- 仮定3** システムに加わる加法的外乱は、主に通信路におけるサイト間の非線形特性(例えばキューイング等)により定まる。

いま、図2は、第 $(i)$ サーバにおけるパケット入力過程のモデルを表している。ここでは、[仮定1]に従ってパケットの間隔時系列を次のように表す。

まず、各文字を以下のように定義する。

**定義1**  $S_j(t)$  ;  $j$  番目のパケットの時刻  $t$  での到着時刻

**定義2**  $S_{j-1}(t')$  ;  $(j-1)$  番目のパケットの時刻  $t'$  での到着時

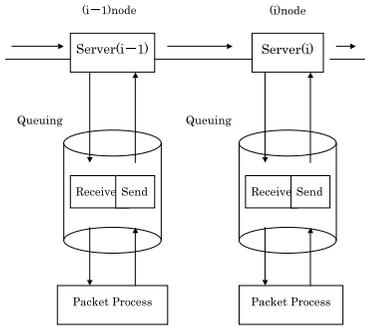


図 1 1次元ネットワークにおけるサーバ構成図

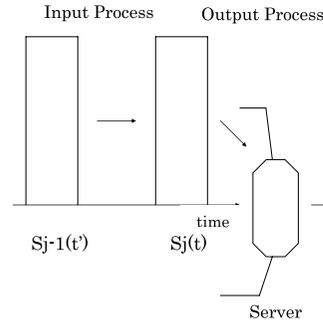


図 2 サーバへのパケット到着過程

それゆえ、任意のサーバにおける入力過程の到着時間間隔は

$$T_j(t) \triangleq S_j(t) - S_{j-1}(t). \quad (2.1)$$

と定義できる。このような時間間隔系列の考え方は、例えば、自律的に発生する神経パルス列においても見られる [9]。

ここでは、周期パルス列の分散関係、すなわち、パルス間隔系列の確率分布に着目し、それを利用することを基本としている。

時刻  $t \geq 0$  において、サーバへの入力パケットを  $T_j(t)$  とし、これは連続値をとるものとする。また、 $T_j(t)$  の時間的変化率  $dT_j(t)/dt$  は一定値をとるのではなく、サーバ ( $i$ ) に送信されてくるパケット蓄積量に影響をあたえながら、時々刻々と変化していく。

図 5 で使われている変数の確率空間について記述する。確率空間  $(\Omega, F)$  は可測空間であり、 $I$  は、 $[0, \infty)$  として時間区間を表す。また、確率空間  $(Z_t, F_t, P)$ 、 $t \in I$  と表され、 $P$  は、 $(\Omega, F)$  における確率測度、 $(F_t)$  は増大する  $\sigma$ -集合体の族であり、 $(Z_t)$  は、 $(F_t)$  に適合するランダム変数の族である。

図 5 に表われる各変数は、上記の確率空間上で定義された確率変数である。 $N_j(t)$  は情報ネットワークからのパケット入力過程。 $Q(t)$  はサーバ内パケットのキューイング過程を表す。ただし、 $Q(t)$  は、キューイングバッファとして情報ネットワークからの入力用と出力用の 2 種類のキューが存在する。通常、送信用キューよりも、受信用キューがサーバ内のパケット処理のネックにより受信用キューが増大する。よって、本論文において、以下のサーバ内キューについては、すべて受信用キューについての議論を行うものとする。 $N_j(t)$ 、 $Q(t)$ 、はすべて確率的な挙動を示し、それぞれは独立した確率過程とする。

以上の考え方を応用することにより、情報ネットワークにおけるサーバ入力過程のモデルを構築する。

そこで、式 (2.1) を利用することにより  $T_j(t)$  のモデルを式 (2.2) のように定式化する。

$$\frac{dT_j(t)}{dt} = \beta [T_j(t) - T_{j-1}(t)] + bn_j(t) \quad (2.2)$$

ここで、 $\beta$  は  $T_j(t)$  に関する確率分布を、 $n_j(t)$  は加的外乱、仮定 3 を表している。さらに、パケットレート  $\rho(t)$  [ビット/秒] とおき、入力パケット [ビット/秒] を  $N_j(t)$  とおくと、次式を定義する。

**定義 3** 入力パケット [ビット/秒]  $N_j(t)$  の定義

$$N_j(t) \triangleq \rho(t) \cdot T_j(t) \quad (2.3)$$

ただし,  $j=1,2,\dots$ である。それゆえ, 式 (2.3) は, 形式的に次式となる

$$\frac{dN_j(t)}{dt} = W[N_j(t);t] + b[N_s(t);t]n_j(t) \quad (2.4)$$

このとき,  $W[]$ は  $N_j(t)$  に関する確率分布である。 $b[]$ は, 外乱項係数で, 入力依存性を表している。ここで, 式 (2.4) の線形モデルとして次式を得る。

$$\frac{dN_j(t)}{dt} = W_0 \cdot N_j(t) + b_0 N_j(t) n_j(t) \quad (2.5)$$

ここで,  $W_0, b_0$  は  $N_j(t)$  の平均値  $N_j^m$  の回りで線形化したときの係数であり, それぞれ, つぎのようになる。

$$W_0 \equiv \frac{\partial W(N_j(t) | N_j(t) = N_j^m)}{\partial N_j} > 0 \quad (2.6)$$

$$b_0 \equiv \frac{\partial b(N_j(t) | N_j(t) = N_j^m)}{\partial N_j} > 0 \quad (2.7)$$

それゆえ, 式 (2.5) は形式的につぎのように表される。

$$\frac{dN_j(t)}{N_j(t)} = W_0 \cdot dt + b_0 \cdot n_j(t) dt \quad (2.8)$$

このとき, 式 (2.8) における外乱項を, 次式のように置く。

$$n_j(t) dt \triangleq dZ_j(t) \quad (2.9)$$

ただし,  $Z_j(t)$  はウィナー過程としての外乱項である。

以上のようなモデリングにより, 情報ネットワークのサーバ入力過程は, 次のような対数正規型の確率微分方程式で表されることがわかる [1]。

$$\frac{dN_j(t)}{N_j(t)} = W_0 \cdot dt + b_0 dZ_j(t) = \mu_j \cdot dt + \sigma_j dZ_j(t) \quad (2.10)$$

ただし,  $\mu_j$  は,  $N_j(t)$  の平均,  $\sigma_j$  は  $N_j(t)$  の分散を表す。

すなわち, 上述の考え方によりサーバ内キューイングモデルは形式的に次のような表現できる。

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = \mu dt + \sigma dZ(t) \quad (2.11)$$

ただし,  $\mu$  は,  $Q(t)$  の平均,  $\sigma$  は  $Q(t)$  の分散,  $Z(t)$  はウィナー過程としての外乱項を表す。

このようにして, 情報ネットワークに存在するサーバに入力されるパッケージがサーバ内にキューイングされ, サーバキューに出力されたパッケージは, その後サーバ内で処理される。このことを図5で表す。

図5のサーバについての前提条件は, 図2の中で情報ネットワークに存在するサーバへのパッケージ入力, 対数正規型確率密度関数をとるものを対象としている。画像データのようなひとつのパッケージがパッケージ(送信の物理的単位)長として大きいデータの場合, サーバでのパッケージ入力分布として実際に良く見られる分布である。入力分布として対数正規型確率密度関数を想定することは, 複雑な情報ネットワークのサーバモデリングを考察する上で実用的な面で, かつ有益性があるからである。

ここで, サーバへのパッケージ発生時間間隔入力および出力を対数正規型確率密度関数としてサーバ内の受信用キューイングバッファ内に存在する累積パッケージ個数の確率密度関数をシミュレーションした。

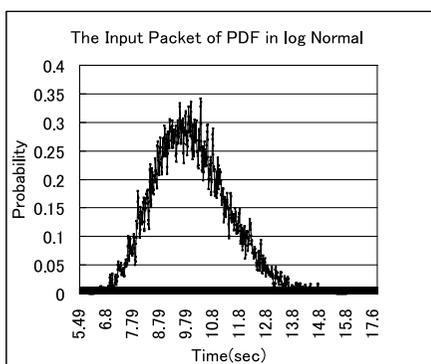


図3 対数正規型確率密度入力パケット

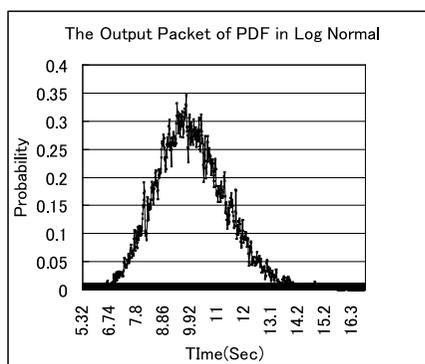


図4 対数正規型確率密度出力パケット

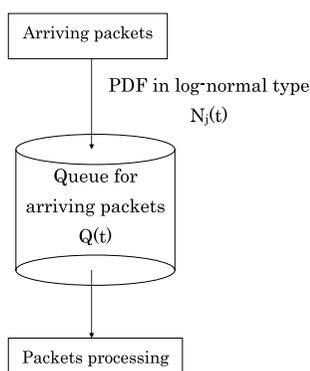


図5 受信用キューに関する入出力

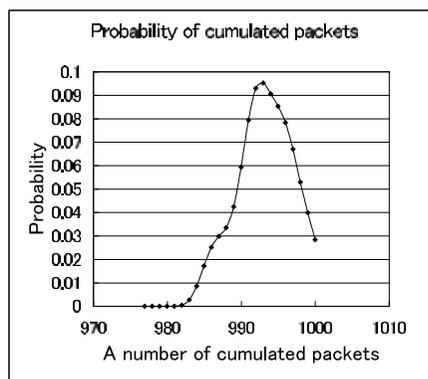


図6 サーバ内累積キューの確率密閉関数

結果が、図3、図4、図6である。ただし、サーバへの入力とサーバからの出力は、独立した確率過程としている。シミュレーションに関する設定条件は、入出力ともに、対数正規型確率密度関数は、平均が10、分散を2とした。キュー内には、当初1000個のパケットが存在している状態でシミュレーションを実施している。サーバ入力が、対数正規分布であることからパケット入力の確率モデルは、次式となる。

$$dN_j(t) = \mu_j N_j(t)dt + \sigma_j N_j(t)dZ(t) \quad (2.12)$$

ここで、数理ファイナンスにおけるデリバティブズを考え方を適用すれば、サーバの入力キューイングの安定化状態は、式(2.13)で表すことができる[4, 5]。

$$dX(t) = dV[Q(t), t] + R(t)dN_j(t) \quad (2.13)$$

ここで、各記号の意味は以下の通りである。

$N_j(t)$  は、入力パケットの単位時間当たりのパケット量。 $\mu_j$  は、情報ネットワークからサーバ内キューイングへの入力パケットの平均値。 $\sigma_j$  は、情報ネットワークからサーバ内キューイングへの入力パケットの分散。 $Q(t)$  は、時刻  $t$  におけるサーバキューイング蓄積量。 $\mu$  は、サーバキューイング内パケットの平均。 $\sigma$  は、サーバキューイング内パケットの分散。 $X(t)$  は、サーバ入力キュー

イングの安定化状態,  $V[Q(t), t]$  は, サーバ入力キューイングがもたらす派生状態を表す。

この考え方は, 数理ファイナンスにおけるデリバティブズをサーバキューイングの安定評価に応用している。デリバティブズはリスク回避を目的とした考え方である。ここで,  $R(t)$  サーバへのキューイング安定状態を表す係数。例えば, サーバキューイング過程  $Q(t)$  は, ある汎関数  $V[\bullet]$  により  $V[Q(t), t]$  としてサーバへのキューイング安定状態の評価を表す。

## 2.2 サーバにおけるキューイングの情報デリバティブズ

いま, 式 (2.13) の右辺第 1 項は, 次式である。

$$dV[Q(t), t] = \left\{ \mu Q \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + \sigma Q \frac{\partial V}{\partial Q} dZ(t) \quad (2.14)$$

式 (2.13) は, サーバキューイングのヘッジを表している。ゆえに, 式 (2.13), (2.14) より, 次式を得る。

$$\begin{aligned} dX &= \left\{ \mu Q \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + \sigma Q \frac{\partial V}{\partial Q} dZ(t) + R(t) \left\{ \mu_j N_j(t) dt + \sigma_j N_j(t) dZ(t) \right\} \\ &= \left\{ \mu Q \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + R(t) \mu_j N_j(t) \right\} dt + \left\{ \sigma Q \frac{\partial V}{\partial Q} + R(t) \sigma_j N_j(t) \right\} dZ(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで, 安定状態を維持するためにウィナー項の係数をゼロにすると

$$R(t) = - \left( \frac{\sigma}{\sigma_j} \right) \cdot \frac{Q}{N_j} \cdot \frac{\partial V}{\partial Q} \quad (2.16)$$

となる。 $R(t)$  は, ヘッジにおけるサーバへのキューイング入力パケットの安定状態を表す係数である。そこで,  $X(t)$  が安定化するためのパケットレート  $r$  が存在するものとすれば, つぎのように表わすことができる。

$$rdt = \frac{dX}{X} \quad (2.17)$$

これより, 次式を得る。

$$dX = rXdt \quad (2.18)$$

このことより, 次式を得る。

$$\mu Q \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + R(t) \mu_j N_j(t) = r \{ V(Q(t), t) + R(t) N_j(t) \} \quad (2.19)$$

ここで, 式 (2.19) を変形すると, つぎようになる。

$$\mu Q \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + (\mu_j N_j(t) - rN_j(t)) R(t) = 0 \quad (2.20)$$

式 (2.16) より, 式 (2.20) は次式となる

$$\mu Q \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} (\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + \left\{ - \left( \frac{\sigma}{\sigma_j} \right) \cdot \frac{Q}{N_j(t)} \cdot \frac{\partial V}{\partial Q} [\mu_j N_j(t) - rN_j(t)] \right\} = 0 \quad (2.21)$$

このとき, 式 (2.21) の左辺第 1 項と第 5 項について注目すると, つぎようになる。

$$\frac{\partial V}{\partial Q} \left\{ \left( - \frac{\sigma}{\sigma_j} \right) \mu_j + r \left( \frac{\sigma}{\sigma_j} \right) + \mu \right\} \quad (2.22)$$

式 (2.22) の  $\{ \}$  の中は, つぎのように変形できる。

$$\left\{ \left( \frac{\sigma}{\sigma_j} \right) (r - \mu_j) + \mu \right\} \quad (2.23)$$

ここで、つぎのような置き換えを仮定すると、次式を得る

$$\left( \frac{\sigma}{\sigma_j} \right) (r - \mu_j) + \mu = r \quad (2.24)$$

式 (2.24) より、次式を得る。

$$\frac{(r - \mu_j)}{\sigma_j} = \frac{r - \mu}{\sigma} \equiv \lambda \quad (2.25)$$

ここで、 $\lambda$  をリスクフリーレートと呼ぶ。これより式 (2.22), (2.24) より、次式を得る。

$$\frac{1}{2}(\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV + rQ \frac{\partial V}{\partial Q} = 0 \quad (2.26)$$

ゆえに、式 (2.26) を変形すると、次式を得る。

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2}(\sigma Q)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} - rQ \frac{\partial V}{\partial Q} + rV \quad (2.27)$$

式 (2.13) は、数理ファイナンスにおけるサーバキューイングの派生状態と入力パケットのヘッジを表している。このようなヘッジを「情報デリバティブズ」と呼ぶことにする。これは上述のようにサーバキューイング入力過程の変動リスクによるサーバキューイングのリスクの安定化でありサーバの状態安定化を表す。

ここで、ファイナンス理論を応用するとこのようなシステムの状態が安定化(無リスク化)されるための評価式が次式の B.S (ブラック・ショールズ) 方程式で表される。この偏微分方程式の境界条件は、ファイナンスでは「派生証券の支払い契約により定まる」ことから、サーバでは派生価値のある時間区間により定まる [5]。例えば、ファイナンスでいう行使価格が  $K$  のヨーロッパコールオプションでは、時点  $T$  における支払いは確定的で  $\max\{Q(T) - K, 0\}$  として与えられる [5]。また、 $Q(t)=0$  ならば派生価値はつねに 0 である。よって、境界条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T} V(x, t) &= \max\{x - K, 0\} \\ \lim_{t \rightarrow 0} V(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ただし、 $0 \leq t \leq T$  である。いま、式(2.27)はサーバキューイング量  $Q(t)$  により派生する状態であり、式 (2.29) のように置く。

$$V(Q, t) = e^{-r(T-t)} U(Q, t) \quad (2.29)$$

これは、 $t=T$  において  $V(Q, T) = U(Q, T)$  となるように保証していることを意味する。すなわち、 $Q$  が一定であるなら、時間  $t$  だけが増大する時、 $t=T$  (期末) における派生状態の値は  $U(Q, T)$  により拘束されていることになる。この  $t=T$  における拘束量は、 $U(Q, T)$  である。 $V(Q, 0)$  の変動量  $e^{-rT} U(Q, 0)$  は、 $t=0$  における派生状態の評価であり、期末期間に対して減少関数となっていることである。

ここで、 $\xi = \ln(Q+1)$  とおき、変数変換すると、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q} &= e^{-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial Q^2} &= e^{-2\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - e^{-2\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.30)$$

さらに、つぎのように変形する。

$$\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} + \{r - (1 - e^{-\xi})\frac{1}{2}\sigma^2\}(1 - e^{-\xi})\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2(1 - e^{-\xi})^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \quad (2.31)$$

ただし、 $t \in [0, T]$ ,  $\xi \in [0, K]$  である。よって、(2.31) は、つぎのようになる。

$$\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0, \quad (2.32)$$

ここで、境界条件は、式 (2.33) および式 (2.34) とする。

$$\left\{ \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial \xi} \right\}_{\xi=K} = \beta U^K(t) \quad (2.33)$$

$$\left\{ \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial \xi} \right\}_{\xi=0} = \gamma U^0(t) \quad (2.34)$$

ただし、式 (2.33), (2.34) の  $\beta, \gamma$  は任意の定数であり、 $U^0(t)$ ,  $U^K(t)$  はそれぞれサーバキューイング量がゼロと限界値の時の境界量を表す。このような条件のもとで、式 (2.29) の Explicit な解を求めることにする。

いま、式 (2.31) において、つぎのように置き換える。

$$\zeta = \frac{t}{\{1/K\}/\{(r - (1 - e^{-\xi})\frac{1}{2}\sigma^2)(1 - e^{-\xi})\}} \quad (2.35)$$

$$l = \xi/K, \quad (2.36)$$

$$\mu = \left\{ (r - (1 - e^{-\xi})\frac{1}{2}\sigma^2) \right\} / \left\{ \{1/K\}(-\frac{1}{2}\sigma^2)(1 - e^{-\xi}) \right\} \quad (2.37)$$

これより、次式のように変形できる。

$$\frac{\partial U(l, \zeta)}{\partial \zeta} + \frac{\partial U(l, \zeta)}{\partial l} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 U(l, \zeta)}{\partial l^2} \quad (2.38)$$

ただし、 $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $0 \leq l \leq 1$  である。ここで、式 (2.33), (2.34) の境界条件は、つぎのようになる。

$$\left\{ \frac{\partial U(l, \zeta)}{\partial l} \right\}_{l=1} = \beta U^1(\zeta) \quad (2.39)$$

$$\left\{ \frac{\partial U(l, \zeta)}{\partial l} \right\}_{l=0} = \gamma U^0(\zeta) \quad (2.40)$$

ここで、式 (2.39), (2.40) で表される系をモード領域に変換するために、次のように  $U(l, \zeta)$  を固有関数展開すると、次式を得る [10]。

$$U(l, \zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i(\zeta) \phi_i(l) \quad (2.41)$$

$$U_i(\zeta) = \int_0^1 \rho(l) \phi_i(l) U(l, \zeta) dl \quad (2.42)$$

ただし、 $\rho(l)$  は、つぎのようになる。

$$\rho(l) = \exp(-\mu l) \quad (2.43)$$

ここで、 $\rho(l)$  は、式 (2.38) の固有値問題を自己随伴化するように選んだ関数であり、 $\rho(l)$  を式 (2.43) のように選べば、式 (2.38) の固有値問題は、次式のようにになる。

$$\frac{1}{\mu} \frac{d}{dl} \left\{ \rho(l) \frac{d\phi_i(l)}{dl} \right\} + \lambda_i \rho(l) \phi_i(l) = 0, \quad (2.44)$$

$$\left\{ \beta \varphi_i(l) + \frac{d\varphi_i(l)}{dl} \right\}_{l=1} = 0 \quad (2.45)$$

$$\left\{ \gamma \varphi_i(l) + \frac{d\varphi_i(l)}{dl} \right\}_{l=0} = 0 \quad (2.46)$$

ここで、式 (2.24), (2.46) より固有関数  $\varphi_i(l)$ , 固有値  $\lambda_i$  を求めれば次式を得る (付録付録 A, 付録 B 参照)。

$$\varphi_i(l) = A_i \exp\left(\frac{\mu l}{2}\right) \left\{ \left(\frac{2\alpha_i}{\mu}\right) \cos \alpha_i l + \sin \alpha_i l \right\} \quad (2.47)$$

$$\lambda_i = \frac{\mu}{4} + \frac{\alpha_i^2}{\mu} \quad (2.48)$$

ただし,  $A_i$  は固有関数  $\varphi_i(l)$  の直交関数系を形成する定数で, つぎのようになる。

$$A_i = \left\{ 2 \left( \frac{\alpha_i^2}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{4} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.49)$$

ここで,  $\alpha_i$  は式 (2.50) の超越方程式の解である。

$$\cot \alpha_i = \frac{\alpha_i}{\mu} - \frac{\mu}{4\alpha_i} \quad (2.50)$$

さて, サーバキューイングの安定状態を表す係数  $R$  は式 (2.16) より, つぎのようになる。

$$\begin{aligned} R(t) &= -\left(\frac{\sigma}{\sigma_j}\right) \cdot \frac{Q}{N_j} \cdot \frac{\partial V}{\partial Q} = -\left(\frac{\sigma}{\sigma_j}\right) \cdot \frac{Q}{N_j} \cdot \frac{\partial V}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial Q}, \\ &= -\left(\frac{\sigma}{\sigma_j}\right) \cdot \frac{Q}{N_j} \cdot \frac{1}{Q+1} \cdot \frac{\partial V}{\partial l} = -Ge^{-r(T-t)} \cdot \frac{\partial U}{\partial l} \end{aligned} \quad (2.51)$$

ここで,  $G = \sigma/K(\sigma_j N_j)$ ,  $Q/(Q+1) \approx 1$  とすると, 式 (2.51) から次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial l} &= \frac{\partial}{\partial l} \sum_{i=1}^{\infty} U_i(\zeta) \varphi_i(l) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} U_i(\zeta) \frac{\partial}{\partial l} \varphi_i(l) \end{aligned} \quad (2.52)$$

式 (2.51) は, 式 (2.52) より次式を得る。

$$R(t) = -Ge^{-r(T-t)} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} U_i(\zeta) \frac{\partial \varphi_i(l)}{\partial l}, \quad (2.53)$$

ここで  $U_i(\zeta)$  は, 次式を満足する。

$$\frac{dU_i(\zeta)}{d\zeta} = \lambda_i U_i + \left(\frac{\beta}{\mu}\right) \varphi_i(1) U^1(\zeta) + \frac{r}{\mu} \varphi_i(0) U^0(\zeta) \quad (2.54)$$

### 3 サーバにおける安定評価

#### 3.1 ヨーロピアンコールオプションによる安定評価

つぎに, サーバの安定状態を評価するために, 数理ファイナンスのオプション評価理論のヨーロッパ・コールオプションを活用する [4]。ヨーロッパ・コールオプションとは, ある資産を 1 単位定められた価格で買う権利 (権利行使価格) のことをいう。その中で, コールオプション

ンとは、この権利の行使時がオプションの満期時である場合をいう [4]。サーバの安定評価として、オプションをサーバ内の蓄積キューイング量と考える。満期時は、システムの設定期間とする。権利行使価格は、蓄積キューイング量のある蓄積量とする。この考え方より、次式を定義する。

**定義 4** サーバの安定評価

$$\begin{aligned} J_c &= e^{-r(T-t)} E \left[ V(Q(T), T), K \mid Q(t) = q \right] \\ &= e^{-r(T-t)} E \left[ \max\{Q(T) - K, 0\} \mid Q(t) = q \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし、サーバ内累積サーバキューイング量が無制御状態にあるとき、 $Q(T)=K$  と仮定する。これは、 $t=T$ におけるサーバのキューイング量  $Q(T)$  とサーバのキューイング容量  $K$  との差を評価するものであり、サーバにおいては処理の安定の評価になる。上式は、ファイナンスでいうヨーロッパアン・コールオプションの評価式でありリスク中立測度 [4] ～ [7] のもとで、つぎのように表わす。

$$J_c(q, t) = Q\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \quad (3.2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{Q}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (3.3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (3.4)$$

この評価式 (3.2) ～式 (3.4) は、終端時刻におけるサーバキューイング量  $Q(T)$  とサーバ容量  $K$  との差を評価するものであり、この評価値の現在時刻評価を与える。そこで、式 (2.16) より、近似的につぎのように表わすことができる。

$$\zeta = \frac{t}{\{1/K\}/\{(r - (1 - e^{-\xi})\frac{1}{2}\sigma^2)(1 - e^{-\xi})\}} \quad (3.5)$$

ゆえに、式 (3.5) にしたがって、式 (3.2) ～ (3.4) の計算結果を代入すれば、安定化関数  $R(t)$  が計算できる。

### 3.1 サーバ安定評価のための派生関数

つぎに、 $t=T$ における累積サーバキューイング量  $Q(T)$  とサーバの安定評価量  $D(K)$  に対して、 $T > t$ において  $Q(T) < D(K)$  となる確率を  $P_r(Q(T) < D(K) \mid Q(T))$  と表すと、つぎようになる。

$$\begin{aligned} &P_r(Q(T) < D(K) \mid Q(T)) \\ &= P_r(\ln Q(T) < \ln D(K) \mid \ln Q(t)) = 1 - \int_{\ln D(K)}^{\infty} f(\ln Q(T)) d \ln Q(T) \\ &= 1 - \int_{-d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dZ = \int_d^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dZ \\ &= 1 - \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dZ = 1 - \Phi(d) \end{aligned} \quad (3.6)$$

ただし、 $d$  は次式となる。

$$d = \frac{\ln(Q(t)/D(K)) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.7)$$

さらに、これに相反する確率は、つぎようになる。

$$\bar{P}_r(Q(T) > D(K)|Q(t)) = 1 - P_r(Q(T) < D(K)|Q(t)) = \bar{\Phi}(d) \quad (3.8)$$

それゆえ、式 (3.8) は、 $T > t$  において  $Q(T) > D(K)$  となる確率である。ここで、式 (3.8) を安定評価確率と呼ぶ。この時、式 (3.5) に準じて安定化関数を次式で定義する。

定義 5 安定化関数の定義

$$R(t) \equiv -\left(\frac{\sigma}{\sigma_j}\right) \cdot \frac{1}{N_j} \cdot \frac{1}{K} \times \left[Q(t) \cdot \bar{P}_r(Q(T) > D(K)|Q(t))\right] \quad (3.9)$$

ここで、 $Q(t) \cdot \bar{P}_r[\cdot]$  は、サーバキューイング評価量を表している。

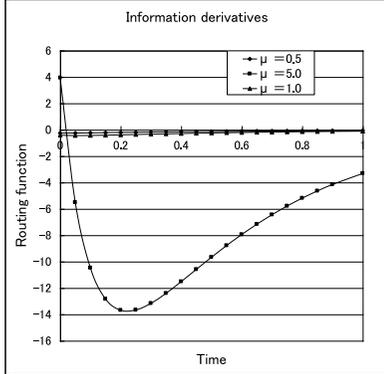


図 7 固有関数によるパケット棄起の計算

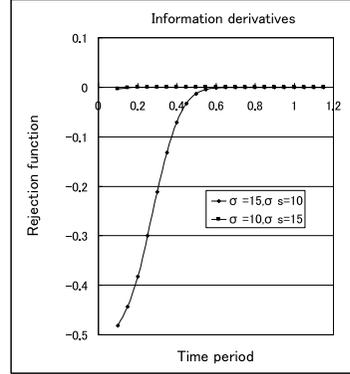


図 8 ファイナンスによる Rejection 計算値

[例] (1) システムのモデル式を式 (2.32)、境界条件を次式とする。

$$\left\{\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial \xi}\right\}_{\xi=K} = 0, \left\{\frac{\partial U(\xi, t)}{\partial \xi}\right\}_{\xi=0} = 0 \quad (3.10)$$

ここで、式 (2.35) ~ (2.53) の変数変換によりモデル式は式 (2.38) となり、境界条件は、つぎのようになる。

$$\left\{\frac{\partial U(l, \zeta)}{\partial l}\right\}_{l=0} = 0, \left\{\frac{\partial U(l, \zeta)}{\partial l}\right\}_{l=1} = 0 \quad (3.11)$$

ここで、固有関数展開法により安定化関数は式(2.51)~式(2.53)のようになる。そこで、式(2.47)~式 (2.50) の関数を用いて、式 (2.53) を計算すると図 7 のようになる。図 7 の使用パラメータは、つぎの通りである。ここでは、空間変数に対応する変数  $l$  は固定して計算している。

$$\mu = 0.5, \sigma = 1, \sigma_j = 0.8, \rho \times N_j = 1, K = 1$$

$$\mu = 5.0, \sigma = 1, \sigma_j = 0.8, \rho \times N_j = 1, K = 1$$

$$\mu = 1.0, \sigma = 1, \sigma_j = 0.8, \rho \times N_j = 1, K = 1$$

各パラメータの意味は、つぎの通りである。

$\mu$  : サーバキューイングモデルにおける平均パケット数

$\sigma$  : サーバキューイングモデルにおけるパケットの分散

$\rho_j$  : 入力パケットのビットレート

$N_j$  : 入力パケット数

$K$  : サーバ容量設計値

この図 7 から解るように、サーバキューイングモデルにおける平均パケット数が大きいと、サー

バのキューが限界値に短時間に到達することがわかる。

(2) ここでは、安定評価確率式 (3.8) のもとで安定化関数式 (3.9) を計算すると図8のようになる [4,7]。

各パラメータの意味は、以下の通りである。

$$\sigma=15, \sigma_j=10, \rho_j=1500, r=10, N_j=10, K=1,$$

$$\sigma=10, \sigma_j=15, \rho_j=1500, N=5000, N_j=20, K=1.$$

各パラメータの意味は、以下の通りである。

$\sigma$  : サーバキューイングモデルにおけるパケットの分散

$\sigma_j$  : 入力パケットの分散

$\rho_j$  : 入力パケットのビットレート

$N_j$  : 入力パケット数

$K$  : サーバ容量設計値

図8からは、サーバキューイングモデルにおける分散が大きい場合、安定化関数でサーバのキューイングバッファを切り替えてもバッファ内キューが効率良く処理されず、切り替えによる効果を発揮するのに時間を要する。

#### 4 むすび

本研究は、情報ネットワークにおけるサーバのパケット入力、数理ファイナンスでの派生価値をもたらす資材であるという考え方に基づいている。数理ファイナンスを応用することにより、効率的なパケット送信を決定する方法を定式化した。数理ファイナンスでの相対価格を情報ネットワークのサーバに応用した。相対価格とは、時点  $t$  における派生証券の価格を意味する。この派生価値を満足する2階の偏微分方程式を、ある境界条件のもとで安定化関数を求めた。

つまり、サーバキューイング量が、ある安定評価量を超過する確率を求め、それをを用いて安定化関数を定義した。その結果、固有関数展開法を用いることにより、任意の時点における安定化関数の形状が簡単に計算できることがわかった。

また、時刻を限定した評価を与えることにより安定評価を2種類定義した。その1つは、終端時刻においてサーバキューイング量とサーバ容量との差の評価を与え、その評価に対する現在時刻評価量を計算し、安定化関数の定式化に利用した。あとの1つは、サーバキューイング量が安定評価量を超過する確率を計算し、同じように安定化関数の定式化に利用した。その結果、安定に対する安定化関数の形状が簡単に計算できることがわかった。

#### 参考文献

- [1] Paul Wilmott: Derivatives; John Wiley & Sons,1998
- [2] Black, F. and Scholes, M:The Pricing of Options and Corporate Liabilities;Journal of Political Economy, vol.-81, pp.-637-654, (1973)
- [3] Merton, R: Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model; Journal of EconomicTheory, vol. 3, pp. 373-413, (1971)
- [4] Amin, K.I and Jarrow,R.A: Pricing options on risky assets in a stochastic interest rate economy; Mathematical Finance, vol. 2, pp.217-237,(1992)

白井, 天野, 井上: トランザクション消滅のある待ち行列系の最適配分法-ファイナンス論的

- アプローチ-; 電気学会論文誌, pp.-453-463, vol.-120-C, No.4, 2000年4月
- [6] H. Hidaka, K. Saitoh, N. Shinagawa, T. Kobayashi: Teletraffic Characteristics of Cellular Communication for Different Types of Vehicle Motion; IEICE Trans. commu., pp.-558-564, Vol.-E84-B, No.3, 2001
- [7] 白井, 天野, 井上: ファイナンス論的評価による待ち行列系最適制御-収益レートに対する最適性の条件-; 電気学会論文誌, pp.-554-560, vol.-120-C, No.4, 2000年4月
- [8] 白井, 天野, 井上: トランザクション消滅のある待ち行列系に対する流通評価-流通収益最大問題における最適性の条件-; 電気学会論文誌, pp.-401-409, vol.-121-C, No.2, 2001年2月

## 付録 A Appendix1: Derivation of eignfunction

式 (2.44) に  $\rho(l) = e^{-\mu l}$  を代入し, 微分を実行すると次式を得る。

$$e^{-\mu l} \left\{ \frac{d^2 \varphi_i(l)}{dl^2} - \mu \frac{d\varphi_i(l)}{dl} + \mu \lambda_i \varphi_i(l) \right\} = 0 \quad (\text{付録 A.1})$$

ここで, 上式がゼロになるためには, 次式となることである。

$$\frac{d^2 \varphi_i(l)}{dl^2} - \mu \frac{d\varphi_i(l)}{dl} + \mu \lambda_i \varphi_i(l) = 0 \quad (\text{付録 A.2})$$

この式をラプラス変換すると, 次式を得る。

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^2 \varphi_i(l)}{dl^2} \right\} = s^2 \Phi_i(s) - s\varphi_i(0) - \varphi_i'(0) \quad (\text{付録 A.3})$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d\varphi_i(l)}{dl} \right\} = s\Phi_i(s) - \varphi_i(0) \quad (\text{付録 A.4})$$

式 (付録 A.3), (付録 A.4) を式 (付録 A.2) に代入し整理すると, 次式を得る。

$$\Phi_i(s) = \frac{j}{s^2 - \mu j + \mu \lambda_i} \varphi_i(0) + \frac{1}{s^2 - \mu j + \mu \lambda_i} \{ \mu \varphi_i(0) + \varphi_i'(0) \} \quad (\text{付録 A.5})$$

式 (付録 A.5) で

$$\mu \varphi_i(0) + \varphi_i'(0) = 0 \quad (\text{付録 A.6})$$

よって, つぎのようになる。

$$\Phi_i(s) = \frac{s}{s^2 - \mu s + \mu \lambda_i} \varphi_i(0) \quad (\text{付録 A.7})$$

ここで, ラプラス逆変換で下記の公式を使う。

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 2bs + c} \right\} \\ &= \frac{s+b}{(s+b)^2 + (\sqrt{c-b^2})^2} - \frac{b}{(s+b)^2 + (\sqrt{c-b^2})^2} \\ &= e^{-bt} \left( \cos rt - \frac{b}{r} \sin rt \right), \quad (r = \sqrt{c-b^2}) \end{aligned} \quad (\text{付録 A.8})$$

この公式より  $b=-\mu/2$ ,  $c=\mu\lambda_i$  に対応するから、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}\varphi_i^j(l) &= \varphi_i^j(0)e^{\frac{\mu}{2}l} \left\{ \cos \alpha_i l + \left( \frac{\mu}{2\alpha_i} \right) \sin \alpha_i l \right\}, \\ &= \varphi_i^j(0) \cdot \frac{\mu}{2\alpha_i} \cdot e^{\frac{\mu}{2}l} \left\{ \left( \frac{2\alpha_i}{\mu} \right) \cos \alpha_i l + \sin \alpha_i l \right\}.\end{aligned}\quad (\text{付録 A.9})$$

式 (付録 A.9) で  $\varphi_i(0) \cdot \frac{\mu}{2\alpha_i} = A_i$  と置けば固有関数が得られる。

## 付録 B Appendix 2: 固有関数に関する係数の誘導

固有関数  $\varphi_i(l)$  を下記の式に代入すると、つぎのようになる。

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d}{dl} \left\{ \rho(l) \frac{d\varphi_i(l)}{dl} \right\} + \lambda_i \rho(l) \varphi_i(l) = 0 \quad (\text{付録 B.1})$$

ここで、2階常微分方程式を解く。本文内、固有関数は直交関数系を形成することより次式を得る。

$$\int_0^1 \rho(l) \cdot \varphi_i(l) \cdot \varphi_j(l) dl = 1 \quad (\text{付録 B.2})$$

ただし、 $\rho(l) = e^{-\mu l}$  である。上式に  $\varphi_i(l)$ ,  $\rho(l)$  を代入し、積分を実行すると次式を得る。

$$A_i^2 \left\{ \frac{2\alpha_i^2}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} + \frac{1}{2} + \left( \frac{2\alpha_i^2}{\mu^2} - \frac{1}{2\alpha_i} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \frac{2}{\mu} \cos^2 \alpha_i \right\} = 1 \quad (\text{付録 B.3})$$

ここで、上式左辺が1になるためには、次式でなければならない。

$$\left( \frac{2\alpha_i^2}{\mu^2} - \frac{1}{2\alpha_i} \right) \sin \alpha_i \cos \alpha_i - \frac{2}{\mu} \cos^2 \alpha_i = 0 \quad (\text{付録 B.4})$$

かつ、次式とならなければならない。

$$A_i^2 \left\{ \frac{2\alpha_i^2}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} + \frac{1}{2} \right\} = 1 \quad (\text{付録 B.5})$$

よって、つぎのようになる。

$$A_i = \left\{ 2 \left( \frac{\alpha_i^2}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{4} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{付録 B.6})$$

$$\cot \alpha_i = \frac{\alpha_i^2}{\mu} - \frac{\mu}{4\alpha_i} \quad (\text{付録 B.7})$$