論　　文

論理における真理値の複素数表記

Complex Number Notation for the Truth Value in Logic

石井　忠夫*

概要

In this paper, we will investigate how to introduce the complex number notation for the truth value in logic. The truth value in a logic is used to interpret whether a given proposition is valid or not. The proposition are notated by formulas, which are constructed from the set of atomic propo-sitional variables $\boldsymbol{VAR}$ by the standard truth functional connectives: ¬(negation), ∧ (conjunction), ∨ (disjunction) and → (material implication). So, to interpret a formula, we need at first to define a truth assignment function $v : \boldsymbol{VAR} \to \{0, 1\}$. Here $\{0, 1\}$ is a set of truth values in 2-valued logic. As the valid formulas in 2-valued logic, law of excluded middle, law of noncontradiction, law of double negation, De Morgan's laws and Lewis principles are well-known. On the other hand, there exists a situation in which 2-valued logic, i.e. law of excluded middle $A \vee \neg A$ was not valid. To interpret such a situation, there are proposed several kinds of non-standard logics, intuitionistic logic, De Morgan logic and Ł- ukasiewicz 3-valued logic, for instance. The validity of formulas in non-standard logics, are defined on the order relation among the truth value set of many numerical elements. Therefore, in order to exploit the strong analytical property of complex number domain, we will propose the complex number notation, precisely $v(B) = v(A)e^{i\theta}$ as the interpretation of a pair sentence (A, B), instead of using natural number or real number as the truth value notation in logic.

キーワード : ２値論理、直観主義論理、ド・モルガン論理、多値論理、真理値の複素数表記 .

1　はじめに

２値論理は命題の真理値として、真と偽の２つを要請する単純な解釈をとるが、その解釈の明解性の故に日常生活においてもいろんな場面で使われている。その第一の例はコンピュータの中の論理素子 NOT, AND, OR, NAND, NOR, EX-OR 等の働きである。これらは皆、ブール代数を用いてその働きを明瞭に定義できる。ブール代数は、２値論理の命題を表現するための言語（接続子として、“かつ”、“または”、“ならば”、“でない”を持つ）と相似な構造を持ち、単純命題に割り当てた真理値から、そのより複雑な合成命題の真理値を計算する手続きの定義を内包している。これにより複雑な合成命題がトートロジー（恒真）になるか否かを計算により判断

* 新潟国際情報大学 経営情報学部 情報システム学科

できる。２値論理のトートロジーとして、排中律、無矛盾律、二重否定の除去、ド･モルガン律、選言三段論法、ルイスの原理などが挙げられる。

他方、２値論理では扱えない状況も存在する。例えば、排中律は論理式で $A \vee \neg A$ と表されるが、この意味は任意の命題 A について、A は真（正しい）または偽（正しくない）のいずれかであることを言明している。即ち、どんな問題も真と偽のいずれかに決着できることを主張していることになる。しかし、現実には、リーマン予想（リーマンのゼータ関数の虚の零点の実数部分は全て $\frac{1}{2}$ である）に代表されるいくつかの未解決な問題が存在し、真とも偽とも決着がつかいないケースがある。このような状況を扱うためにいくつかの非標準論理が提案されている。これらは皆、真と偽の他に１つまたは複数の第三の値を真理値集合として含み、その真理値集合の要素間に数値の大小関係に基づく順序構造を導入している。そして、複雑な合成命題の真理値の計算は、この順序関係の構造から定義される。本論文では、複数の真理値要素から構成される真理値集合の領域を自然数または実数から複素数の領域に拡張する試みである。具体的にはペア文 (A, B) の解釈として［1］、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ に基づいて、複素単位円上に論理式の真理値を、$v_P(B) = v_P(A)e^{i\theta}$ と割り当てる。非標準論理として、直観主義論理、ド・モルガン論理、ウカシェヴィッチ n 値（$Ł_n$）論理について、複素真理値集合を定義し、それらのモデルを構成した。

第２章では２値論理および各種非標準論理でのトートロジーや論理式を解釈する代数を導入する。第３章では各種論理の付値集合および複素数の付値集合への拡張について議論する。第４章では直観主義論理、ド・モルガン論理、ウカシェヴィッチ n 値（$Ł_n$）論理について、複素真理値集合を定義し、それらのモデルを構成する。第５章ではペア文の公理系を導入する。最後に、第６章では今後の課題について述べる。

２　論理の真理値

２.１　２値論理

２値論理は真偽の確定した文である命題を扱う［2］。例えば、

（１）素数は無数に存在する。

（２）６は素数である。

（３）全ての三角形は正三角形である。

を考えると、（１）は正しい（真な）命題であり、また（２）と（３）は正しくない（偽な）命題である。命題表現は基本的な命題を論理的な操作で結び合わせることにより、より複雑な合成命題が作り出せる。基本的な命題表現を命題変数 $p, q, r, \cdots$ で表し、論理的な操作は次の論理結合子で形式化することにより、個々の命題表現を論理式の形で表現できる。任意の命題を表す論理式 A, B について、

（i）　$\wedge$（論理積）：$A \wedge B$ は、合成命題 ”A かつ B” を表す論理式

（ii）　$\vee$（論理和）：$A \vee B$ は、合成命題 ”A または B” を表す論理式

（iii）　$\rightarrow$（含意）：$A \rightarrow B$ は、合成命題 ”A ならば B” を表す論理式

（iv）　$\neg$（否定）：$\neg A$ は、合成命題 ”A でない” を表す論理式、と定める。

命題変数の集合を $\boldsymbol{VAR}$ とすると、言語 $\mathscr{L}_C = < \boldsymbol{FOR}_C, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \perp >$ を用いて、命題を表す論理式の集合 $\boldsymbol{FOR}_C$ が帰納的に構成できる。尚、$\top, \perp$ はそれぞれ恒真と恒偽を表す命題定数である。この時、合成命題の論理式の真偽は、以下に示すそれぞれの論理結合子の真偽決定操

作を真理値表で定義することで定まる。

表１：２値論理結合子に対する真理値表

A	$\neg A$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

任意の論理式はそれを構成する命題変数に真偽のいずれかを割り当てることで真偽が決まる。そこで、おのおのの命題変数への数値の割り当てをする付値関数 $v : \boldsymbol{VAR} \to \{0,1\}$ を導入する。但し、$v(\top) = 1$ および $v(\bot) = 0$ とし、また、$min(a, b)$ は a, b の値の中で大きくない方を選ぶ関数、$max(a, b)$ は a, b の値の中で小さくない方を選ぶ関数とする。この時、付値関数は以下の定義により、論理式全体の集合 $\boldsymbol{FOR_C}$ から付値集合 $\{0, 1\}$ への写像に一意的に拡張できる。

（C1）$v(\neg A) = 1 - v(A)$

（C2）$v(A \wedge B) = min(v(A), v(B))$

（C3）$v(A \vee B) = max(v(A), v(B))$

（C4）$v(A \to B) = max(1 - v(A), v(B))$

実際に、この定義は表１の真理値表の付値集合の下での言い換えである。この付値関数 v を用いて $v : \mathscr{L}_C \to \mathscr{A}_2$ により、言語 $\mathscr{L}_C$ と同型なブール代数 $\mathscr{A}_2 = \langle \boldsymbol{A_2}, \sim, \cap, \cup, \supset, 1, 0 \rangle$ が構成できる。このブール代数により、論理式の解釈が与えられる。即ち、任意の $A,\ B \in \boldsymbol{FOR_C}$ に対して、$v(A) = a, v(B) = b$ を満たす $a, b \in \boldsymbol{A_2}$ が存在し、次が成り立つ。

（C1）′ $\sim a = 1 - a$：$\sim$ は論理結合子 $\neg$ のブール代数上での解釈

（C2）′ $a \cap b = min(a,b)$：$\cap$は論理結合子$\wedge$のブール代数上での解釈

（C3）′ $a \cup b = max(a,b)$：$\cup$は論理結合子$\vee$のブール代数上での解釈

（C4）′ $a \supset b = max(\sim a,b)$：$\supset$は論理結合子$\to$のブール代数上での解釈

２値論理（または古典論理とも云う）で恒真となる論理式には次のものがある。ここで、$P \leftrightarrow Q$ は $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ の省略形である。

（１）$_c$ $A \vee \neg A$ （排中律）

（２）$_c$ $\neg(A \wedge \neg A)$ （無矛盾律）

（３）$_c$ $\neg\neg A \leftrightarrow A$ （二重否定の除去）

（４）$_c$ $(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow (A \to B)$ （対偶律）

（５）$_c$ $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ （ド・モルガン律１）

（６）$_c$ $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ （ド・モルガン律２）

（７）$_c$ $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

（８）$_c$ $((A \to B) \to A) \to A$ （パース律）

（９）$_c$ $(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ （選言三段論法）

（10）$_c$ $(A \to B) \vee (B \to A)$

（11）$_c$ $A \to (B \vee \neg B)$

（12）$_c$ $A \wedge \neg A \to B$ （ルイスの原理）

しかし、２値論理の他にも次節にその一部を示すたくさんの論理が提案されている。これらは

全て２値論理で扱えないので非標準論理と呼ばれる。

２．２　いくつかの非標準論理

直観主義論理は２値論理において排中律（１）$_c$ を認めない論理であり、排中律を恒真としないことにより、以下の論理式が恒真にならない［2, 5, 4］。

−（１）$_c$ $A \vee \neg A$ （排中律）

−（３）$_c$ において、$\neg\neg A \to A$ （二重否定の除去）

−（４）$_c$ において、$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ （反対偶律）

−（６）$_c$ において、$\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ （ド・モルガン律２）

−（７）$_c$ $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

−（８）$_c$ $((A \to B) \to A) \to A$ （パース律）

−（11）$_c$ $A \to (B \vee \neg B)$

ド・モルガン論理は２値論理において選言三段論法（９）$_c$ を認めない論理であり、選言三段論法を恒真としないことにより、以下の論理式が恒真にならない［6］。

−（１）$_c$ $A \vee \neg A$ （排中律）

−（２）$_c$ $\neg(A \wedge \neg A)$ （無矛盾律）

−（７）$_c$ $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

−（８）$_c$ $((A \to B) \to A) \to A$ （パース律）

−（９）$_c$ $(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ （選言三段論法律）

−（11）$_c$ $A \to (B \vee \neg B)$

−（12）$_c$ $A \wedge \neg A \to B$ （ルイスの原理）

ウカシェヴィッチ３値（$Ł_3$）論理は２値論理において真と偽の他に第３の値として ”可能 ” を導入した論理であり、この ”可能 ” の導入により、以下の論理式が恒真にならない［5, 4］。

−（１）$_c$ $A \vee \neg A$ （排中律）

−（２）$_c$ $\neg(A \wedge \neg A)$ （無矛盾律）

−（７）$_c$ $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

−（８）$_c$ $((A \to B) \to A) \to A$ （パース律）

−（９）$_c$ $(A \vee B) \wedge \neg A \to B$ （選言三段論法律）

命題変数の集合 $\boldsymbol{VAR}$ に対して、上の３つの論理式を構成する言語を次で定義する。

１．直観主義論理の言語：$\mathscr{L}_I = < \boldsymbol{FOR_I}, \neg, \wedge, \vee, \to, \top, \mathrm{N}, \perp >$ に対して、命題変数への数値の割り当てをする付値関数 v_I：$\boldsymbol{VAR} \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ を導入する。直観主義論理では排中律 $A \vee \neg A$ が恒真とならないので真理値として N を取るとする。また、$v_I(\top) = 1$, $v_I(\perp) = 0$ および $v_I(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}$ とする。この時、付値関数は以下の定義により、直観主義論理式全体の集合 $\boldsymbol{FOR_I}$ から付値集合 $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ への写像に一意的に拡張できる［4］。

（$I1$） $v_I(\neg A) = v_I(A \to \perp)$

（$I2$） $v_I(A \wedge B) = min(v_I(A), v_I(B))$

（$I3$） $v_I(A \vee B) = max(v_I(A), v_I(B))$

（$I4$） $v_I(A \to B) = \begin{cases} 1 & (v_I(A) \leq v_I(B)) \\ v_I(B) & (v_I(A) > v_I(B)) \end{cases}$

２値論理のブール代数と同様に、この付値関数を用いて $v_I : \mathscr{L}_I \to \mathscr{A}_I$ により、直観主義論理の擬ブール代数 $\mathscr{A}_I = (\boldsymbol{A_I}, \sim, \cap, \cup, \supset, 1, \frac{1}{2}, 0)$ を構成でき、論理式の解釈が次で与えられる。即ち、任意の $A, B \in \boldsymbol{FOR_I}$ に対して、$v_I(A) = a, v_I(B) = b$ を満たす $a, b \in \boldsymbol{A_I}$ が存在し、次が成り立つ。

$(I1)'$ $\sim a = a \supset 0$ ：$\sim$ は論理結合子 $\neg$ の擬ブール代数上での解釈

$(I2)'$ $a \cap b = min(a, b)$ ：$\cap$ は論理結合子 $\wedge$ の擬ブール代数上での解釈

$(I3)'$ $a \cup b = max(a, b)$ ：$\cup$ は論理結合子 $\vee$ の擬ブール代数上での解釈

$(I4)'$ $a \supset b = \begin{cases} 1 & (a \leq b) \\ b & (a > b) \end{cases}$ ：$\supset$ は論理結合子 $\to$ の擬ブール代数上での解釈

直観主義論理の論理式の解釈を真理値表で表すと表２の通りである。

２．ド・モルガン論理の言語：$\mathscr{L}_{DM} =< \boldsymbol{FOR_{DM}}, \neg, \wedge, \vee, \to, \top, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \perp >$ に対して、命題変数への数値の割り当てをする付値関数 v_{DM}：$\boldsymbol{VAR} \to \{0, i, j, 1\}$ を導入する。ド・モルガン論理では排中律 $A \vee \neg A$ と無矛盾律 $\neg(A \wedge \neg A)$ が恒真とならないので、$A \wedge \neg A$, $A \vee \neg A$ の真理値として I, J を取るとする。また、$v_{DM}(\top) = 1$, $v_{DM}(\perp) = 0$ および $v_{DM}(\mathrm{I}) = i$, $v_{DM}(\mathrm{J}) = j$ とする。この時、付値関数は以下の定義により、ド･モルガン論理式全体の集合 $\boldsymbol{FOR_{DM}}$ から付値集合 $\{0, i, j, 1\}$ への写像に一意的に拡張できる［6］。

$$(DM\,1)\ v_{DM}(\neg A) = \begin{cases} 0\ (v_{DM}(A) = 1) \\ 1\ (v_{DM}(A) = 0) \\ i\ (v_{DM}(A) = i) \\ j\ (v_{DM}(A) = j) \end{cases}$$

$(DM\,2)$ $v_{DM}(A \wedge B) = min(v_{DM}(A), v_{DM}(B))$

$(DM\,3)$ $v_{DM}(A \vee B) = max(v_{DM}(A), v_{DM}(B))$

$(DM\,4)$ $v_{DM}(A \to B) = v_{DM}(A) \leq v_{DM}(B)$

表２：直観主義論理結合子に対する真理値表

$v_I(A)$	$v_I(\neg A)$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

$v_I(A)$	$v_I(B)$	$v_I(A \wedge B)$	$v_I(A \vee B)$	$v_I(A \to B)$
1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0	1

この付値関数を用いて $v_{DM} : \mathscr{L}_{DM} \to \mathscr{A}_{DM}$ により、ド・モルガン代数 $\mathscr{A}_{DM} = \langle \boldsymbol{A_{DM}}, \sim, \cap, \cup, \supset, 1, i, j, 0 \rangle$ を構成でき、論理式の解釈が次で与えられる。即ち、任意の $A, B \in \boldsymbol{FOR_{DM}}$ に対して、$v_{DM}(A) = a, v_{DM}(B) = b$ を満たす $a, b \in \boldsymbol{A_{DM}}$ が存在し、次が成り立つ。

$(DM\,1)'\ \sim a = \begin{cases} 0\ (a=1) \\ 1\ (a=0) \\ i\ (a=i) \\ j\ (a=j) \end{cases}$ ：～は論理結合子￢のド・モルガン代数上での解釈

$(DM\,2)'\ a \cap b = min(a,b)$：∩は論理結合子∧のド・モルガン代数上での解釈

$(DM\,3)'\ a \cup b = max(a,b)$：∪は論理結合子∨のド・モルガン代数上での解釈

$(DM\,4)'\ a \supset b = a \leq b$：⊃は論理結合子 → のド・モルガン代数上での解釈

ド・モルガン論理の論理式の解釈を真理値表で表すと表３の通りである。

３．$Ł_3$論理の言語：$\mathscr{L}_{Ł_3} = < \boldsymbol{FOR}_{Ł_3}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \mathrm{N}, \bot >$ に対して、命題変数への数値の割り当てをする付値関数 $v_{Ł_3} : \boldsymbol{V\,AR} \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ を導入する。$Ł_3$論理では第３の値として”可能”を導入しているので、この真理値として N を取るとする。また、$v_{Ł_3}(\top) = 1$, $v_{Ł_3}(\bot) = 0$ および $v_{Ł_3}(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}$とする。この時、付値関数は以下の定義により、$Ł_3$論理式全体の集合 $\boldsymbol{FOR}_{Ł_3}$ から付値集合 $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ への写像に一意的に拡張できる［4］。

$(Ł_3 1)\ v_{Ł_3}(\neg A) = 1 - v_{Ł_3}(A)$

$(Ł_3 2)\ v_{Ł_3}(A \wedge B) = min(v_{Ł_3}(A), v_{Ł_3}(B))$

$(Ł_3 3)\ v_{Ł_3}(A \vee B) = max(v_{Ł_3}(A), v_{Ł_3}(B))$

$(Ł_3 4)\ v_{Ł_3}(A \rightarrow B) = min(1, 1 - v_{Ł_3}(A) + v_{Ł_3}(B))$

この付値関数を用いて $v_{Ł_3} : \mathscr{L}_{Ł_3} \rightarrow \mathscr{A}_{Ł_3}$ により、$Ł_3$論理代数 $A_{Ł_3} = \langle \boldsymbol{A}_{Ł_3}, \sim, \cap, \cup, \supset, 1, \frac{1}{2}, 0 \rangle$ を構成でき、論理式の解釈が次で与えられる。即ち、任意の $A, B \in \boldsymbol{FOR}_{Ł_3}$に対して、$v_{Ł_3}(A) = a, v_{Ł_3}(B) = b$ を満たす $a, b \in \boldsymbol{A}_{Ł_3}$が存在し、次が成り立つ。

$(Ł_3 1)'\ {\sim}a = 1 - a$：～は論理結合子￢の $Ł_3$論理代数上での解釈

$(Ł_3 2)'\ a \cap b = min(a,b) = \sim({\sim}a + {\sim}b)$：∩は論理結合子∧の $Ł_3$論理代数上での解釈

$(Ł_3 3)'\ a \cup b = max(a,b) = ((a \supset b) \supset b)$：∪は論理結合子∨の $Ł_3$論理代数上での解釈

$(Ł_3 4)'\ a \supset b = min(1, 1 - a + b)$：⊃は論理結合子 → の $Ł_3$論理代数上での解釈

$Ł_3$論理の論理式の解釈を真理値表で表すと表４の通りである。

表３：ド・モルガン論理結合子に対する真理値表

$v_{DM}(A)$	$v_{DM}(\neg A)$
1	0
i	i
j	j
0	1

$v_{DM}(A)$	$v_{DM}(B)$	$v_{DM}(A \wedge B)$	$v_{DM}(A \vee B)$	$v_{DM}(A \to B)$
1	1	1	1	1
1	i	i	1	0
1	j	j	1	0
1	0	0	1	0
i	1	i	1	1
i	i	i	i	1
i	j	0	1	0
i	0	0	i	0
j	1	j	1	1
j	i	0	1	0
j	j	j	j	1
j	0	0	j	0
0	1	0	1	1
0	i	0	i	1
0	j	0	j	1
0	0	0	0	1

表４：Ł$_3$論理結合子に対する真理値表

$v_{Ł_3}(A)$	$v_{Ł_3}(\neg A)$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

$v_{Ł_3}(A)$	$v_{Ł_3}(B)$	$v_{Ł_3}(A \wedge B)$	$v_{Ł_3}(A \vee B)$	$v_{Ł_3}(A \to B)$
1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0	1

３　真理値の複素数表記への拡張

３．１　各種論理の付値集合

改めて各種論理の論理式を解釈する付値関数を以下に列挙する。

（１）２値論理の付値関数：$v : \boldsymbol{VAR} \to \{0, 1\}$

（２）直観主義論理の付値関数：$v_I : \boldsymbol{VAR} \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

（３）ド・モルガン論理の付値関数：$v_{DM} : \boldsymbol{VAR} \to \{0, i, j, 1\}$

（４）Ł$_3$論理の付値関数：$v_{Ł_3} : \boldsymbol{VAR} \to \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

２値論理の付値は否定により反転するが、$v(\neg A) = 1 - v(A)$ で計算できる。また、論理結合子∧，∨の付値は、0, 1 の大小関係の下でそれぞれ $min(x, y)$, $max(x, y)$ 関数で計算できる。また、直観主義論理の否定の付値は、$v_I(\neg A) = v_I(\mathrm{A} \to \bot) = (a \supset 0)$ で定義され、含意の付値は、$a \supset b = 1\ (a \le b)$ または $=b(a > b)$ で計算できる。この含意の計算定義は、直観主義論理を解釈する順序 ≤ が、次の２つの条件を満たすことと等価である。

（*i*）　順序集合 $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ の中に最大元１と最小元０が存在する。

（*ii*）　順序集合 $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ の中の任意の２元 x, y に対して、$x \supset y = max\{z | x \cap z \le y\}$ が存在する。

ド・モルガン論理の付値も否定により反転するが、$v_{DM}(\neg A) = 0\ (v_{DM}(A) = 1)$，$= 1\ (v_{DM}(A) = 0)$、$= i (v_{DM}(A) = i)$ および $= j (v_{DM}(A) = j)$ で計算できる。また、$\{0, i, 1\}$ と $\{0, j, 1\}$ のそれぞれの集合の要素間には大小の順序関係があるが、$\{i, j\}$ 集合の要素間には順序が付かない。論理結合子∧，∨ ⊃の付値は、この順序関係の下でそれぞれ $min(x, y)$，$max(x, y)$，$x \le y$ 関数で計算できる。

Ł$_3$論理の付値集合 $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ は直観主義論理と同じであるが、否定と含意の計算が異なる。具体的には、

- $v_{Ł_3}(\neg A) = 1 - v_{Ł_3}(A) = \frac{1}{2}$　$(v_{Ł_3}(A) = \frac{1}{2})$
- $v_{Ł_3}(A \to B) = min(1, 1 - v_{Ł_3}(A) + v_{Ł_3}(B)) = \frac{1}{2}$　$(v_{Ł_3}(A) = \frac{1}{2}, v_{Ł_3}(B) = 0$ またはこの逆$)$
- $v_{Ł_3}(A \to B) = min(1, 1 - v_{Ł_3}(A) + v_{Ł_3}(B)) = 1$　$(v_{Ł_3}(A) = 0, v_{Ł_3}(B) = 0)$

各種論理の付値集合を図示すると以下の通りとなる。

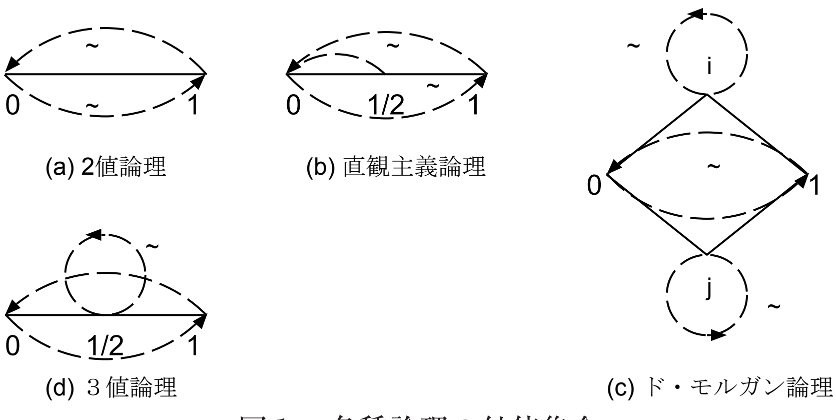

図１：各種論理の付値集合

３．２　真理値の複素数表記

今、論理式の付値集合として、単位円上の複素数 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ sin\,\theta$ を考える。即ち、２つの論理式のペア文 (A, B) が "A は B である" を表現し、実軸上の論理式 A の付値 $v_P(A)$ を単位円上の任意の点（論理式 A から見た相対的な論理式 B の付値 $v_P(B)$）に移す（偏角 θ だけ回転する）と解釈して、次で定める。

$$v_P((A, B)) = 1 \Longleftrightarrow v_P(B) = v_P(A)e^{i\theta} = a(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (1°)$$

実軸上の論理式 A の付値 $v_P(A)$ を仮定し、いくつかの典型的な値の定義を挙げると以下の通りである。

（ｉ）$v_P((A, A)) = 1 \Longleftrightarrow v_P(A) = v_P(A)e^{i0} = v_P(A) \times 1 = v_P(A)$

（ii）$v_P((A, \neg A)) = 1 \Longleftrightarrow v_P(\neg A) = v_P(A)e^{i\pi} = v_P(A) \times (-1) = -v_P(A)$

（iii）$v_P((A, \wr A)) = 1 \Longleftrightarrow v_P(\wr A) = v_P(A)e^{i\frac{\pi}{2}} = v_P(A) \times i = iv_P(A)$（$\wr A$ は $A \wedge \neg A$ の省略形とする）

上の（1°）を満たす付値 $v_P(B) = v_P(A)e^{i\theta}$ を持つ論理式 B の一般的な否定操作を次で定める。

$$v_P((B, \neg B)) = 1 \Longleftrightarrow v_P(\neg B) = v_P(B)e^{i\pi} = v_P(A)e^{i(\pi - arg(B))} = v_P(A)e^{i(\pi - \theta)} \qquad (2°)$$

この時、$v_P((A, \neg\wr A)) = 1 \Longleftrightarrow v_P(\neg\wr A) = v_P(\wr A)e^{i\pi} = v_P(A)e^{i(\pi - \frac{\pi}{2})} = v_P(A)e^{i\frac{\pi}{2}} = v_P(\wr A)$ となり、$\wr A$ の否定は $\wr A$ となる。また、$v_P(\wr A)$ の複素共役は $\overline{v_P(\wr \mathrm{A})} = \overline{v_P(A)e^{i\frac{\pi}{2}}} = v_P(A)e^{-i\frac{\pi}{2}}$ となる［3］。

複素数上の付値集合を図示すると以下の通りである。

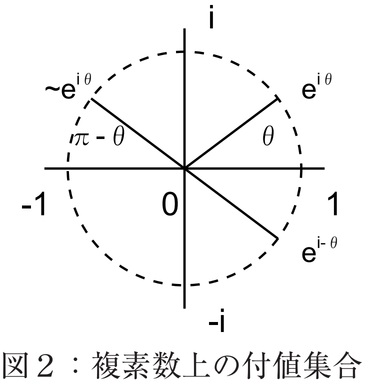

図２：複素数上の付値集合

４　いくつかの非標準論理モデルの翻訳

４．１　ド・モルガン論理の４元モデル

ド・モルガン論理の付値集合 $\{0, i, j, 1\}$ を複素数付値集合 $\{e^{i\theta} | \theta = \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0\}$ で表現する。この複素数付値集合上で、否定は第３．２節の（1°），（2°）で定める。順序関係は、$v_P((A, B)) = 1 \Longleftrightarrow v_P(B) = v_P(A)e^{i\theta}$ に対して、任意の論理式 A, B の偏角 $arg(A)$，$arg(B)$ について、次で定める。

（１）$0 \le arg(A)$（および $arg(B)$）$\le \pi$ ならば $v_P(A) \le v_P(B) \Longleftrightarrow (\pi - arg(A)) \le (\pi - arg(B))$

（２）共役な偏角について、$-\pi \leq arg(A)$（および $arg(B)$）≤ 0 ならば $v_P(A) \leq v_P(B) \Longleftrightarrow arg(A) \leq arg(B)$

（３） $0 \leq arg(A) \leq \pi$ および $-\pi \leq arg(B) \leq 0$ またはこの逆の場合につて、$v_P(A)$ と $v_P(B)$ は比較不能

この解釈の下で、ド・モルガン論理の４元モデルが図３で表現できる。

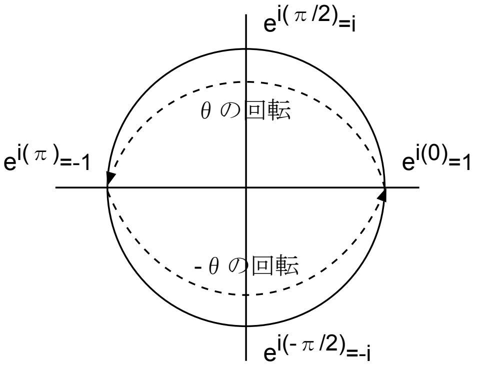

図３：ド・モルガン論理の複素数付値集合

４．２　直観主義モデル

直観主義論理を解釈する擬ブール代数の例として、n 個の要素からなる集合 $S_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^{n-2}}, 0\}$ を考える［4］。この時、この順序集合は第３章の初めに述べた（ i ），（ii）の２つの条件満たし、直観主義の論理結合子の解釈は第２.２節の $(I\,1)' - (I\,4)'$ で与えられる。

（１）S_n の複素数付値集合を次で定める。

$$S'_n = \{e^{i\theta} \mid \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{2}), \frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}), \cdots, \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n-3}(\frac{1}{2^k}), \pi\} = \{1, 0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-3}, -1\}$$

（２）S'_n 上の順序関係を、$\forall z_1, z_2 \in S'_n$ に対して、$z_1 \leq z_2 \Longleftrightarrow (\pi - arg(z_1)) \leq (\pi - arg(z_2))$

この定義の下で、直観主義の論理結合子は第２.２節の $(I\,1)' - (I\,4)'$ を満たし、直観主義モデルが図４で表現できる。

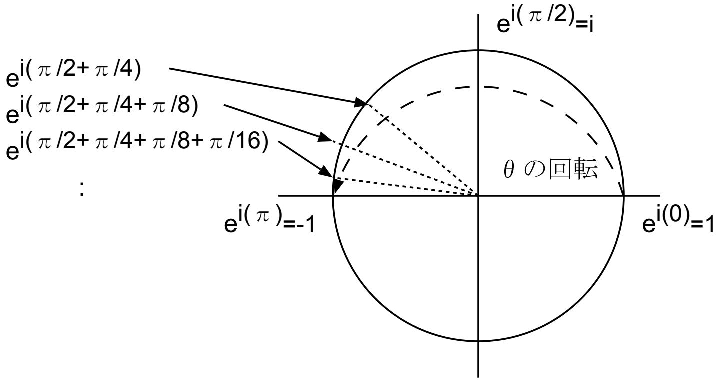

図４：直観主義論理の複素数付値集合

４．３　多値論理モデル

$Ł_3$論理を一般化したウカシェヴィッチ n 値論理の付値集合を $Ł_n=\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ とする[5]。この時、n 値論理の結合子の解釈は第２.２節の $Ł_3$論理の結合子の解釈と同様に、$(Ł_3 1)' - (Ł_3 4)'$ で定義できる。

（１）$Ł_n$ の複素数付値集合 $Ł_n$ およびその実部集合 $R(Ł'_n)$ を次で定める。$R(z)$ は複素数 z の実部を表す。

（ｉ）$n=2k$（偶数の時）

$$\cos\theta_1=\frac{1}{2k-1},\quad r_1=R(e^{i\theta_1})$$

$$\cos\theta_2=\frac{1}{2k-1}(1+2\times 1),\quad r_2=R(e^{i\theta_2})$$

$$\cos\theta_3=\frac{1}{2k-1}(1+2\times 2),\quad r_3=R(e^{i\theta_3})$$

$$\cos\theta_4=\frac{1}{2k-1}(1+2\times 3),\quad r_4=R(e^{i\theta_4})$$

$$\vdots$$

$$\cos\theta_k=\frac{1}{2k-1}(1+2\times(k-1))=1,\quad r_k=R(e^{i\theta_k})=R(e^{i0})=1 \text{ に対して、}$$

$$Ł'_n=\{e^{i\theta}\mid\theta=\theta_k(=0),\ \theta_{k-1},\cdots,\theta_2,\theta_1,\pi-\theta_1,\pi-\theta_2,\cdots,\pi-\theta_k(=\pi)\}$$

$$R(Ł'_n)=\{R(z)\mid z\in Ł'_n\}=\{r_k(=1),\ r_{k-1},\cdots,r_2,r_1,-r_1,-r_2,\cdots,-r_k(=-1)\}$$

（ii）$n=2k+1$（奇数の時）

$$\cos\theta_1=\frac{1}{k}\times 0=0,\quad r_1=R(e^{i\theta_1})=R(e^{i\frac{\pi}{2}})=0$$

$$\cos\theta_2=\frac{1}{k}\times 1,\quad r_2=R(e^{i\theta_2})$$

$$\cos\theta_3=\frac{1}{k}\times 2,\quad r_3=R(e^{i\theta_3})$$

$$\vdots$$

$$\cos\theta_{k+1}=\frac{1}{k}\times k=1,\quad r_{k+1}=R(e^{i\theta_{k+1}})=R(e^{i0})=1 \text{ に対して、}$$

$$Ł'_n=\{e^{i\theta}\mid\theta=\theta_{k+1}(=0),\ \theta_k,\cdots,\theta_2,\theta_1(=\frac{\pi}{2}),\ \pi-\theta_2,\cdots,\pi-\theta_k,\pi-\theta_{k+1}(=\pi)\}$$

$$R(Ł'_n)=\{R(z)\mid z\in Ł'_n\}=\{r_{k+1}(=1),\ r_k,\cdots,r_2,r_1(=0),\ -r_2,\cdots,-r_{k+1}(=-1)\}$$

（２）$Ł'_n$ 上の順序関係を、$\forall z_1, z_2\in Ł'_n$ に対して、$z_1\leq z_2 \Longleftrightarrow R(z_1)\leq Rz_2$ とする。

この定義の下で、n 値論理の結合子は第２.２節の $(Ł_3 1)' - (Ł_3 4)'$ を満たし、n 値論理モデルが図５で表現できる。

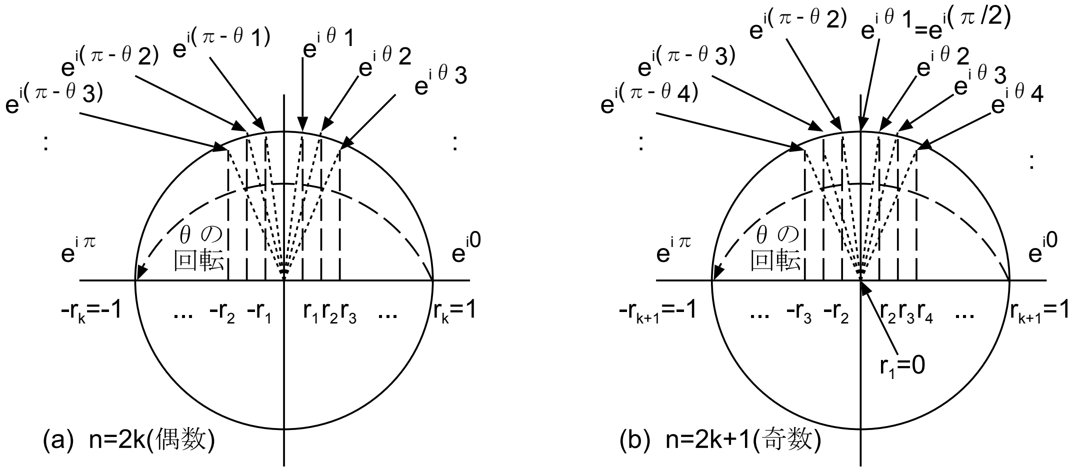

図５：n 値論理の複素数付値集合

5　ペア文の論理体系

真理値の複素数表記は、複素単位円上で偏角 $\theta=0$ で仮定された真理値をペア文 (A,B) が表す "A は B である" の解釈として、偏角 θ を持つ複素数に割り当てることで導入される。即ち、

$$v_P((A,B))=1 \Longleftrightarrow v_P(B)=v_P(A)e^{i\theta}=a(\cos\theta+i\sin\theta)$$

で定義する。ここで、$v_P(A)$ は偏角 $\theta=0$ での付値割り当てであり、２値論理の付値関数を仮定する。典型的な例として、(A,A) が表す "A は A である" を考えると、$v_P(A)=v_P(A)e^{i0}=v_P(A)\times 1=v_P(A)$ となり、アリストテレスの同一律が成り立つ。また、$(A,\neg A)$ が表す "A は ¬A である" に対して、$v_P(\neg A)=v_P(A)e^{i\pi}=v_P(A)\times(-1)=-v_P(A)$ となり、偏角 $\theta=0$ と $\theta=\pi$ の付値は論理値が反転する。今、次の３つのペア文を仮定する。

（１）"A は B でない"：ペア文は $(A,\neg B)$ で表す

（２）"B は C でない"：ペア文は $(B,\neg C)$ で表す

（３）"C は A である"：ペア文は (C,A) で表す

この時、（１）より $v_P(\neg B)=v_P(A)e^{i\theta_1}$、（２）より $v_P(\neg C)=v_P(B)e^{i\theta_2}$ および（３）より $v_P(A)=v_P(C)e^{i\theta_3}$ を得る。これより、$v_P(\neg B)=v_P(A)e^{i\theta_1}=v_P(C)e^{i(\theta_1+\theta_3)}$ を得る。他方、$v_P(\neg C)=v_P(C)e^{i\pi} \Longleftrightarrow v_P(C)=v_P(\neg C)e^{-i\pi}$ と（２）を代入すると、$v_P(\neg B)=v_P(\neg C)e^{i(\theta_1+\theta_3-\pi)}=v_P(B)e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3-\pi)}=v_P(B)e^{i\pi} \Longleftrightarrow v_P(B)=v_P(B)e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3-2\pi)}=v_P(B)e^{i0}$ を得る。よって、$\theta_1+\theta_2+\theta_3=2\pi$ を満たす。$\theta=2\pi n(n=0,1,\cdots)$ に対して $e^{i\theta}=1$ となり、$v_P(A)$ は周期 (2π) で同一の付値を持つ。

ペア文の公理系は、各論理式が２値論理の公理に従うと仮定し次で定める [1]。

$(E1)$ $(A,B)\rightarrow(B,A)$

$(E2)$ $(A,B)\wedge(B,C)\rightarrow(A,C)$

$(C1)$ $(A,B)\rightarrow(\neg A,\neg B)$

$(C2)$ $(A,B)\wedge(C,D)\rightarrow((A\wedge C),(B\wedge D))$

$(C3)$ $(A,B)\wedge(C,D)\rightarrow((A\vee C),(B\vee D))$

$(C4)$ $(A,B)\wedge(C,D)\rightarrow((A\rightarrow C),(B\rightarrow D))$

$(P1)$ $(A,B)\rightarrow(A\rightarrow B)$

$$(Mp)\ \frac{A\quad A \to B}{B}$$

ここで、同一律を表すペア文 (A, A) を追加すると、$(E1)$,$(E2)$ と共にペア文 (A, B) は同値関係 $A \equiv B$ になる。また、$(C1)-(C4)$ は合同関係を表し、ペア文が論理結合子を保存することを要請している。

6　今後の展望

本論文では、真理値集合を複素数で表記することを試みた。２値論理以外の非標準論理においては、真と偽の他に１つまたは複数の第三の値を持つので、それらを相互の順序関係を含めてどのように解釈するかが課題となる。順序関係の構造の違いにより、いろんな論理の解釈が可能となる。複素数の真理集合を導入することにより、順序関係の構造を複素数の偏角の構造に置き換えることが可能となり、複素数の強力な解析特性を適用することで論理の特性を調べることが期待できる。また、ペア文の公理系と複素数の真理値集合の整合性（完全性）を示すことが今後の課題である。

参考文献

［1］ 石井 忠夫，The definition of sequential machine by PSC **新潟国際情報大学 情報文化学部 紀要**，vol.1（2018）, pp.19–32.

［2］ 小野 寛晰，**情報科学における論理**，日本評論社，1994.

［3］ 志賀浩二著，**複素数 *30* 講**，朝倉書店，1989.

［4］ 末木 剛，岩野 秀明，石垣 寿郎，丸山 豊樹，石黒 満，國嶋 一則共著，**知の根拠としての論理学**，公論社，1976.

［5］ 細井 勉，**情報科学のための論理数学**，日本評論社，1992.

［6］ D.C. メーキンソン著，山川 偉也，丸岡 英之共訳，**現代論理学の地平**，法律文化社，1979.