

## 論文

# 光行差の解説 ーブラッドリーの計算値の再現ー

Explanation of aberration  
- Reproduction of Bradley's calculated values -

上西園 武良  
Takeyoshi Kaminishizono

## 概要

周知のように、コペルニクスが地動説を唱え、ケプラー、ニュートンを経て地動説はほぼ確定した。しかしながら、地球の公転運動を明示する直接的な観測事実は、ブラッドリーの光行差の発見によって初めてもたらされた。この意味でブラッドリーの光行差の発見は重要であり、多くの人がその内容を理解すべきである。しかしながら、入門的な書籍には光行差の原理の定性的説明が多く述べられているが、実際の恒星の光行差がどのように観測されるかまでは踏み込めていない。一方、位置天文学の書籍では、球面三角法を使った光行差による観測位置の算出についての詳細な解説がなされているが、天文学の専門家以外の人にとって球面三角法はなじみがなく、理解に至るには敷居の高いものになっている。

そこで、本稿においては、球面三角法には一切触れず、初歩的な線形代数のみを使用して光行差計算の詳細を解説する。さらに、具体例として、ブラッドリーが原著論文に掲載している計算値の再現を試みた。ただし、この論文中には天文学上の基礎データや計算式が記載されていないため、これらを推定して計算を実施した。この結果、差異の平均が1"以内でブラッドリーの計算値を再現できた。

**キーワード:** 光行差, ブラッドリー, 地動説, 天文学史

## 1. はじめに

筆者の専門は人間工学であるが、学部・大学院にて物理を専攻した背景もあり、情報系学部の基礎教育の一環として科学史の講義を担当した。古代から続く天文学は、現代科学の源流として科学史の重要な一部となっている。天文学史における重要なパラダムシフトのひとつは、天動説から地動説への転換である。周知のように、コペルニクスが地動説を唱え、ケプラー、ニュートンを経て地動説はほぼ確定した。しかしながら、地動説の重要な根拠である「地球の公転運動」についての直接的な観測事実は、ブラッドリーの光行差の発見によって初めてもたらされた。

この意味で、ブラッドリーの光行差の発見は重要であり、フーコーの振り子の実験が地球の自転を証明したように、多くの人がその内容を理解すべきである。しかしながら、入門的な書籍には光行差の原理の定性的説明が多く述べられているが、これに基づいて実際の恒星の光行差がどのように観測されるかまでは踏み込めていない。光行差の本質を定量的に理解するための初学者向けの教育的解説書はほぼ見当たらない。一方、位置天文学の書籍では、球面三角法を使った光行差による観測位置の算出についての詳細な解説がなされているが、天文学の専門家以外の人に

とって球面三角法はなじみがなく、理解に至るには敷居の高いものになっている。

そこで、本稿においては、球面三角法には一切触れず、初歩的な線形代数のみを使用して光行差計算の詳細を解説する。さらに、具体例として、ブラッドリーが原著論文<sup>1)</sup>に掲載している計算値の再現を試みる。再現に当たっては、計算式と計算のための天文学的データが必要となるが、ブラッドリーの原著論文には計算式は記載されておらず、天文学的データもほとんど記載されていない。従って、本稿ではこれらを推定して計算を行う。

## 2. 光行差の原理

光行差とは、真空中での光の速度が一定の有限値であり、地球が公転運動を行っているため、恒星の観測方向（視位置）が真の方向からずれる現象である。このずれの方向は地球の運動方向である。このため、1年間観測すると、恒星の視位置は円または楕円を描くことになる。なお、天文学においては、真の方向はしばしば太陽から見た方向と見做されている。

光行差の原理は以下のように説明される。

望遠鏡で恒星の方向を観測することを想定すると、観測系が恒星に対して静止している場合は、図1に示すように、真上方向の恒星Aも斜め方向の恒星Bも、それぞれ本来の角度方向に観測され、視位置と真の位置は同一である。

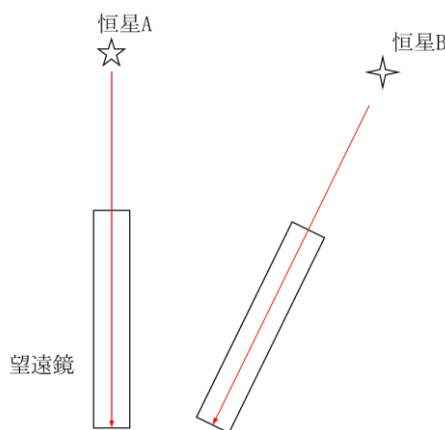


図1 観測系が静止の場合

一方、光速 $c$ が有限であるため、観測系がある速度 $v$ で移動する場合は、進行方向に対してずれた角度方向に観測される。

(A) 真上方向の恒星A：真の位置の方向が進行方向に対して角度 $\theta = 90^\circ$ の場合

この恒星を望遠鏡で観測すると、図2に示すように、望遠鏡先端の中心に入った光は移動距離 $l$ を通過後に、望遠鏡他端の検出位置の中心に達する。この間、 $t = l/c$ の時間が経過しているため、観測系（望遠鏡）は進行方向に

$$d = vt = v \frac{l}{c} = \frac{v}{c} l, \quad (1)$$

の距離だけ移動する。従って、観測系では進行方向に角度 $\theta - \theta'$ だけずれた方向に恒星が観測されることになる。

図 2 より、 $\tan(\theta - \theta') = \frac{d}{l} = \frac{v}{c}$ ,

$v \ll c$ であるので、 $\theta - \theta'$ は微小角となり、

$$\theta - \theta' = \frac{v}{c} = k. \quad (2)$$

ここで、 $k \equiv v/c$ は光行差定数と呼ばれる。光速  $c = 299,792,458 \text{ m/s}$ 、地球の公転速度  $v = 29,780 \text{ m/s}$ であるので、ずれ角度の具体的な数値は以下である。

$$\theta - \theta' = \frac{29,780}{299,792,458} = 0.00993 \text{ rad} = 0.00569^\circ = 20''.5 \text{ (秒角)}.$$

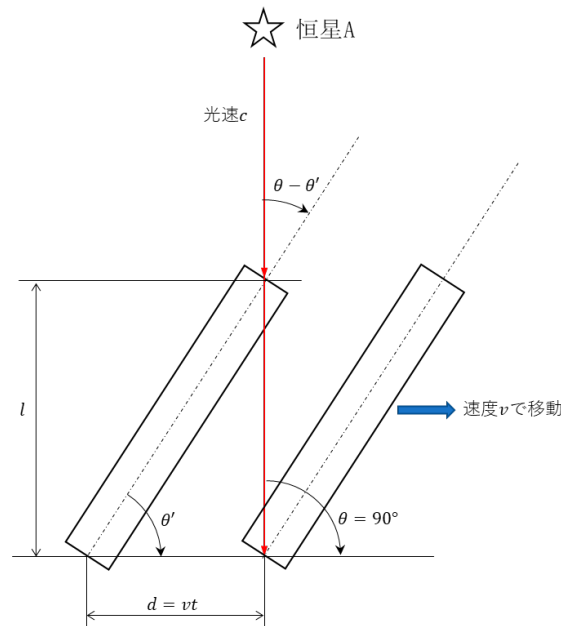


図 2 角度  $\theta = 90^\circ$  の場合の見え方

(B) 斜め方向の恒星 B : 進行方向からの角度  $\theta \neq 90^\circ$  の場合

(A) と同様に、光の移動距離を  $l$ 、所要時間を  $t$  とすると、観測系での望遠鏡の移動距離  $d$  は以下である (図 3)。

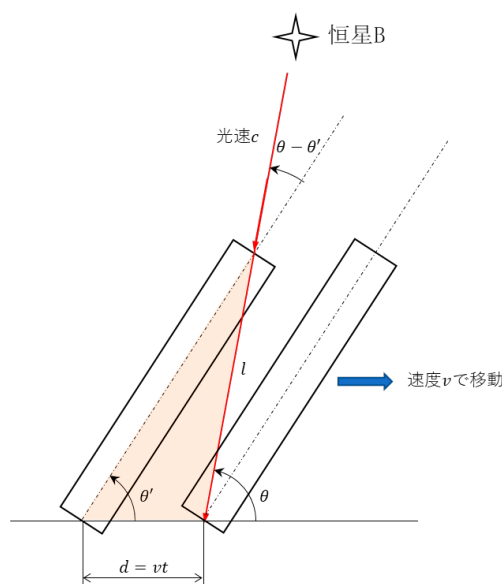
$$d = vt = \frac{v}{c} l. \quad (3)$$

図 3 の影を付けた三角形に正弦定理を適用すると、

$$\sin(\theta - \theta') = \frac{v}{c} \sin \theta', \quad (4)$$

$(\theta - \theta') \ll 1$  を考慮すると、

$$\theta - \theta' = k \sin \theta. \quad (5)$$

図3 角度 $\theta \neq 90^\circ$ の場合の見え方

### 3. 光行差による視位置の計算の前提

光行差の原理は2節で述べた通りであるが、恒星がこの原理に従って実際にどのような視位置になるかを計算し、その結果を観測位置と比較する必要がある。ブラッドリーの場合は、観測対象とした恒星の赤緯変化（地軸に沿った方向の変化）のみを観測した。さらに、この観測値と計算値を比較しているが、計算の詳細は記されていない。ただし、計算の前提とした項目は以下の2点であると記載している。

前提1：地球の公転運動は円運動とする。<sup>2)</sup>

前提2：日月歳差による恒星の赤緯の年次変化は観測値から推定した。<sup>3)</sup>

本稿の計算では、前提1は同様とする。しかし、前提2の日月歳差による赤緯変化のデータがない（ブラッドリーは記載していない）ため、付録2で記載した方法に基づく計算値にて代用する。

### 4. 天体の位置の記述：赤道座標系と黄道座標系

天体が十分遠方にあるとすれば、天体は地球を覆う球面（天球）上にあると見做せる。この天球上の位置を特定するための極座標系として、赤道座標系と黄道座標系が使用される（図4）。ここで、赤道座標系の $z$ 軸は地軸であり、 $xy$ 平面は地球の赤道面である。赤緯（ $\delta$ ）は地球の緯度に相当し、赤道面を $0^\circ$ とし、北側が+、南側が-である。赤経（ $\alpha$ ）は地球の経度に相当する。天球上での太陽の軌跡は黄道と呼ばれているが、黄道が天の赤道（地球の赤道の投影）を南から北へ横切る点が春分点（ $\gamma$ ）で、赤経の起点（ $0^\circ$ ）である。黄道座標系の $xy$ 平面は黄道面であり、この面からの緯度が黄緯（ $\beta$ ）である。黄経（ $\lambda$ ）の起点は、赤経と同じく春分点である。

赤道座標系と黄道座標系の $x$ 軸は共通で、正の方向は春分点方向である。天体の座標値が赤道座標系で（ $L$ 、 $M$ 、 $N$ ）、黄道座標系で（ $l$ 、 $m$ 、 $n$ ）であるとする。また、天球上の点であるので、原点（地球の中心）からの距離は1とする。この時、以下の関係となる。

$$L^2 + M^2 + N^2 = l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (6)$$

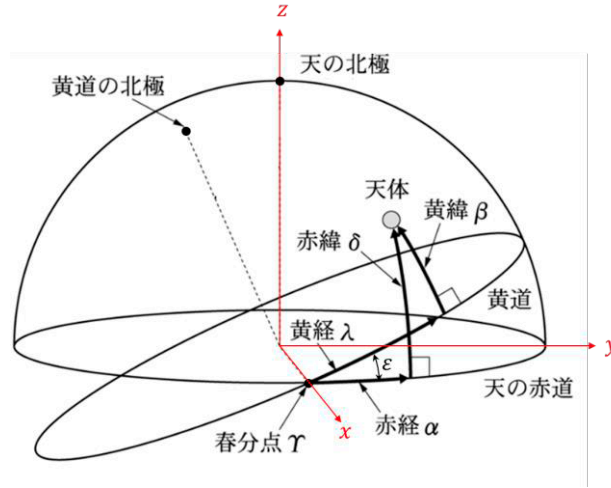


図4 赤道座標系と黄道座標系

ベクトル表示を用いると赤経・赤緯，黄経・黄緯との関係は以下のである。

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (8)$$

一方、黄道座標系を $x$ 軸の正の方向（春分点から原点を見る方向）から見て、 $y \cdot z$ 軸を右に $\varepsilon$ （地軸の傾斜角）だけ回転させたものが、赤道座標系であるので以下の関係となる。

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}. \quad (9)$$

従って、

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda, \quad (10)$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon, \quad (11)$$

$$\sin \delta = \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon. \quad (12)$$

## 5. 光行差による視位置

### 5.1 地球の運動方向の天球上での位置

地球の公転運動は楕円を描くが、離心率は0に近く、円運動で近似できる。このため、ブラッドリーも等速円運動を前提としている（前述の前提1）。この場合、太陽を中心に配置し、公転軌道面の北側から見ると、地球の運動方向は図5aのように円軌道の接線方向である。一方、地球を中心に配置し、黄道の北極から見ると、図5bのように太陽の位置から $90^\circ$ 離れた黄道上の点Cの方向が地球の運動方向となり、光行差によって観測する恒星の視位置はこの方向にずれる。

図5bの状況を勘案し、恒星の真の位置A（赤経 $\alpha$ 、赤緯 $\delta$ ）、光行差による視位置B（赤経 $\alpha'$ 、赤緯 $\delta'$ ）、ずれの方向Cおよび太陽の方向Sを天球上に記載すると図6のようになる。なお、点Pは天の北極である。また、平面OPAと平面OACのなす角を $\nu + 90^\circ$ としている。平面OACを交線OAのまわりに左に $\nu$ だけ回転させれば、2平面は直交する。

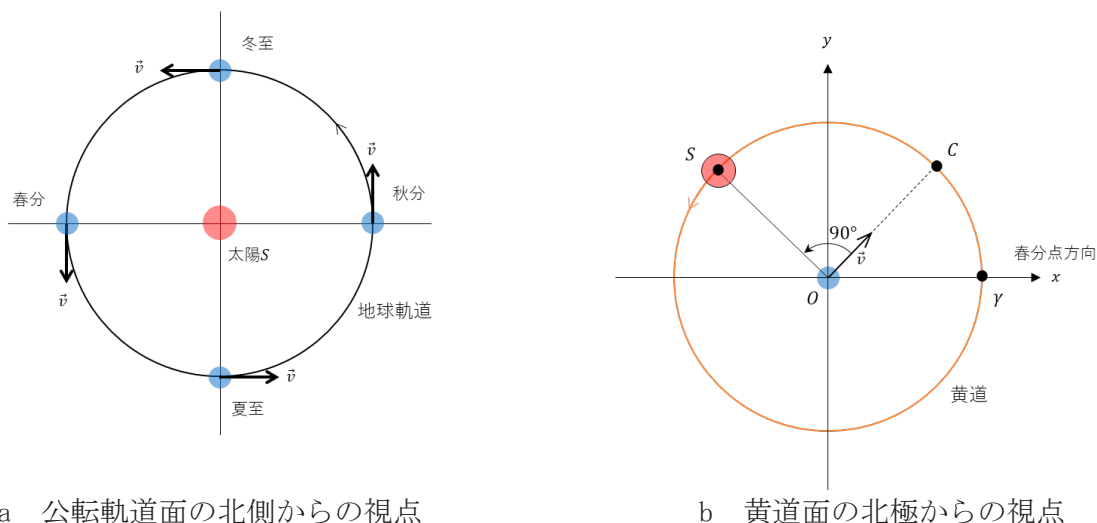
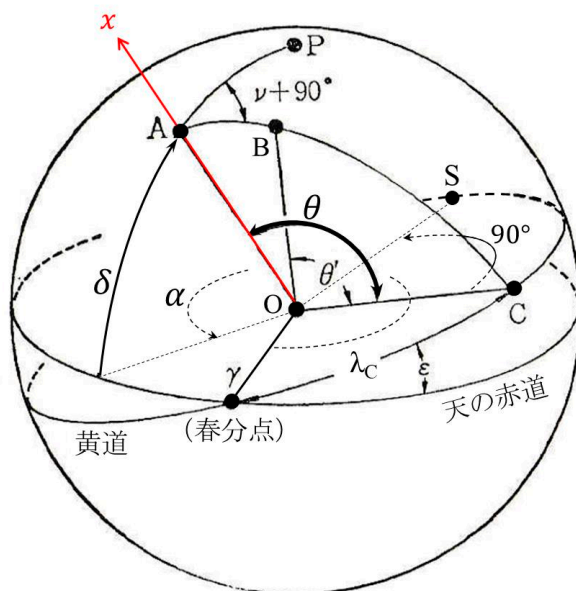


図5 地球の運動方向

図6 天球上での位置関係（長沢の図<sup>4)</sup>を一部改変）

## 5.2 座標回転による視位置の計算

長沢 (1985)<sup>5)</sup> が示しているように、座標回転を3回行うことによって、視位置Bの赤経・赤緯を算出できる。以下では、長沢の記載を補足して説明する。

出発点の座標系は、図6に示すようにOAをx軸の正の方向とし、平面OACをxy平面とする座標系である。この座標系においてB点はxy平面上にあり、原点Oからの距離は1、x軸(OA)となす角は $\theta - \theta'$ であるので、この座標系での座標値は以下である。

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta') \\ \sin(\theta - \theta') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

ただし、式(5)と、 $\theta - \theta' \ll 1$ を考慮した。



この座標系から赤道座標系へ変換するために必要な座標回転は以下の3つである。

- ① まず、当初の座標系の $x$ 軸（OA）まわりに左に $v$ だけ回転させる。この回転によって、平面OACを「A点の赤経線を含む平面OPA」と直交させることができる。この回転操作に対応する行列は以下である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix}. \quad (14)$$

- ② 次に回転後の座標の $y$ 軸（原点Oから引いた平面PAOの法線）まわりに左に $\delta$ だけ回転させる。これによって回転後の $xy$ 平面は赤道座標系の $xy$ 平面と一致するので、緯度は赤緯と一致する。この回転操作に対応する行列は以下である。

$$\begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

- ③ 最後に赤経を一致させるために、 $z$ 軸まわりに右に $\alpha$ だけ回転させる。この回転操作に対応する行列は以下である。

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

従って、視位置Bの赤道座標系での座標を $(L', M', N')$ とすると、①、②、③の順番に行列計算を実施して、

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & 0 & -\sin \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

を得る。

右辺の計算を進めると、視位置Bの座標値は、真の位置の座標値（A点）と光行差による変化分に分離でき、以下のように書き換えられる。

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha & \cos \alpha & -\sin \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \cos v \\ -\sin \theta \sin v \end{pmatrix}. \quad (18)$$

一方、光行差による赤経変化 $\Delta\alpha$ と赤緯変化 $\Delta\delta$ は微小であることを前提として、視位置Bの座標値を展開する。加法定理を使って計算を進めると、こちらも真の位置の座標値と変化分に分離できる。

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta + \Delta\delta) \cos(\alpha + \Delta\alpha) \\ \cos(\delta + \Delta\delta) \sin(\alpha + \Delta\alpha) \\ \sin(\delta + \Delta\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + \Delta\delta \begin{pmatrix} -\sin \delta \cos \alpha \\ -\sin \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \end{pmatrix} + \Delta\alpha \cos \delta \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

式(18)と式(19)において変化分は等しいので、

$$\Delta\delta \begin{pmatrix} -\sin \delta \cos \alpha \\ -\sin \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \end{pmatrix} + \Delta\alpha \cos \delta \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha & \cos \alpha & -\sin \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \cos v \\ -\sin \theta \sin v \end{pmatrix}. \quad (20)$$

両辺の $z$ 成分を比較すれば、着目している赤緯変化 $\Delta\delta$ の表式が得られる。

$$\Delta\delta = -k \sin \theta \sin v. \quad (21)$$

$\Delta\delta$ の計算のためには、 $\sin \theta \sin v$ が必要となるが、平面OACと平面OPAの法線ベクトル同士の内積を考えることによって算出できる。詳細な算出方法は付録1に示すが、 $\lambda_S$ を太陽の黄経として、以下の関係が得られる。

$$\sin \theta \sin v = \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda_S - \sin \alpha \sin \delta \cos \lambda_S \cos \varepsilon + \cos \delta \cos \lambda_S \sin \varepsilon. \quad (22)$$

これを式(21)に代入すると、最終的な赤緯変化 $\Delta\delta$ の表式が得られる。

$$\Delta\delta = -k(\cos\alpha \sin\delta \sin\lambda_S - \sin\alpha \sin\delta \cos\lambda_S \cos\varepsilon + \cos\delta \cos\lambda_S \sin\varepsilon). \quad (23)$$

おそらく、ブラッドリーも同様の考え方で式(23)を得たと推定される。

長沢(1985)も式(23)と同じ式を記載している<sup>6)</sup>。ただし、式(17)にいたる座標回転までは記載しているが、式(18)以降の計算過程は省略されている。導出過程を明示し計算の根拠を確認しておくことは重要であるので、上記のように詳細に解説した。

## 6. 光行差による赤緯変化の観測と計算

### 6.1 観測方法

ブラッドリーは恒星の実際の赤緯変化を次に示す方法にて測定した。図7に示すように、天の北極と観測場所の天頂を繋ぐ大円を子午線と呼ぶ。ブラッドリーは観測対象の恒星がこの子午線上に来た時に天頂との角度 $z$ を精密に測定し、赤緯の変化を観測した。恒星の赤緯を $\delta$ 、観測地点の緯度を $\psi$ とすると、以下の関係となる。

$$\delta = z + \psi. \quad (24)$$

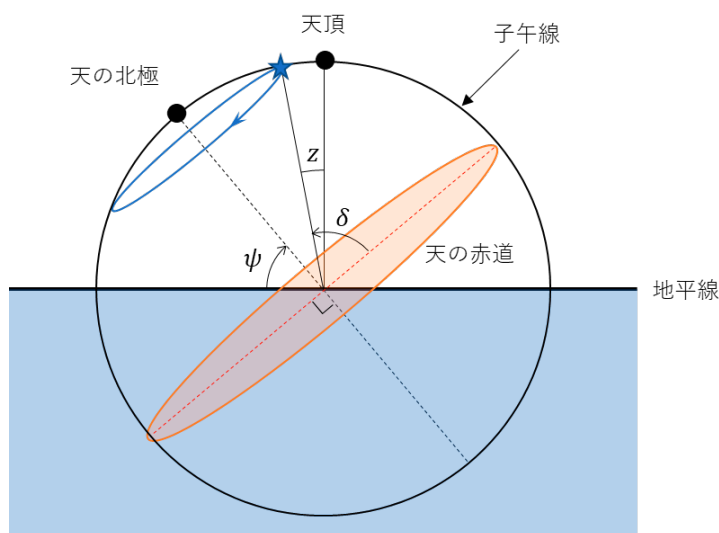


図7 子午線と赤緯変化の測定

### 6.2 ブラッドリーによる観測値と計算値

ブラッドリーは2つの恒星(りゅう座 $\gamma$ 星、大熊座 $\eta$ 星)について、赤緯変化の観測値と式(23)に基づく計算値の詳細を記載している。これらを表1に示す。ただし、りゅう座 $\gamma$ 星については南側への変化量<sup>7)</sup>であり、大熊座 $\eta$ 星については北側への変化量<sup>8)</sup>である。また、英国においてグレゴリオ暦が採用されたのは1752年であり、観測日はそれ以前であるためユリウス暦で記載されている。

計算値と観測値の差異は小さく以下のようにあり、ほぼ一致している。これは、地球の公転運動を仮定した光行差の理論に基づく赤緯変化が観測に一致していることを示しており、地球の公転運動の証明となった。

- ・ りゅう座 $\gamma$ 星 : 最大差異1".5, 差異の絶対値の平均0".53
- ・ 大熊座 $\eta$ 星 : 最大差異1".0, 差異の絶対値の平均0".64



### 6.3 計算上の補足と基礎データの推定

上記 5. の式 (23) を用いてブラッドリーの計算値の再現を試みる。

再現に当たっては、まず、観測時刻を特定する必要があるが、ブラッドリーの論文では日付のみの記載で、観測地点であるウォンステッド<sup>9)</sup>での子午線通過時刻(=観測時刻)の記載がない。計算上必要となるため、2つの恒星に関して、グリニッジ天文台における観測当時の子午線通過時刻を国立天文台へ問い合わせ、この結果(2022年9月22日受領)を表1に追加記載した。ウォンステッドとグリニッジ天文台の経度差は21"であり、時差に換算すると1.4秒で、ほぼ同時刻であるため、グリニッジ天文台での子午線通過時刻を採用した。

次に、数値計算に際しては、種々の天文学基礎データが必要となるが、ブラッドリーの論文に未記載のデータもあるので、当時の資料に基づき、これらを推定する必要がある。

本稿では以下のように推定する。

- ・ 1727 年の春分 : 3 月 10 日 3:38<sup>10)</sup> (ユリウス暦の場合, グレゴリオ暦では 3 月 20 日<sup>10)</sup>)
- ・ 黄道傾斜角 :  $\varepsilon = 23^\circ 26' 11''.336^{11)}$  (「天文年鑑 2021」による)
- ・ 1 太陽年 :  $D_S = 365 \text{ 日 } 5\text{h } 48\text{m } 45.136\text{s}^{11)}$  (「天文年鑑 2021」による)
- ・ 日月歳差 :  $p = 50''.3859^{11)}$  (「天文年鑑 2021」による)
- ・ 光行差定数 :  $k = 1/10110^{12)}$  (ブラッドリーの記載値)
- ・ 1728 年時点でのりゅう座  $\gamma$  星と大熊座  $\eta$  星の真位置 :

真位置のデータとしては、可能な限り観測時(1727 年 9 月~1728 年 9 月)に近いものが望ましい。そこで、「フラムスティード天球図譜」<sup>13)</sup>に付属している「ブラッドリーの恒星表」のデータを用いた。これによれば、1780 年時点でのこれら 2 つの恒星の真位置と歳差は表 2 のようである。ただし、表中の北極距離角は、 $90^\circ - \text{赤緯}$ 、である。

1780 年との 53 年間の歳差を考慮すると、観測時点である 1727 年での真位置は、以下のよう推定される。

りゅう座  $\gamma$  星 : 赤経  $267^\circ 34' 31''.5$ , 赤緯  $51^\circ 32' 2''.5$

大熊座  $\eta$  星 : 赤経  $204^\circ 11' 10''.3$ , 赤緯  $50^\circ 41' 9''.9$

### 6.4 歳差の考慮

上記 3. に記載したように、ブラッドリーは「日月歳差による恒星の赤緯の年次変化は観測値から推定した。」としているが、この観測データを記載していない。従って、日月歳差による真の位置の変化に対しては以下のような推定に基づいて計算を行う。

#### (A) 太陽の黄経

1727 年の春分は 3 月 10 日 3:38 であるので、この時点で太陽の黄経は  $0^\circ$ 、1 太陽年後の黄経は  $360^\circ + p$  とする。従って、春分から  $n$  日後の太陽の黄経は以下である。

$$\lambda_S = \frac{n}{D_S} (360^\circ + p) \quad (25)$$

#### (B) 2つの恒星(りゅう座 $\gamma$ 星, 大熊座 $\eta$ 星)の真位置

日月歳差による春分点移動に伴い恒星の真位置の座標も変化する。時刻の起点での赤経・赤緯を  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$  とすると、1 太陽年後の赤緯・赤経は以下のようなものである。これの算出方法は付録 2 に示した。

$$\alpha = \alpha_0 + p(\cos \varepsilon + \sin \alpha_0 \tan \delta_0 \sin \varepsilon) \quad (26)$$

表1 ブラッドリーの観測値と計算値

A りゅう座 $\gamma$ 星B 大熊座 $\eta$ 星

観測日時		赤緯の変化 (単位: ")	
日付	時刻	観測値	計算値
1727/10/20	15:12	4.5	4.5
1727/11/17	13:22	11.5	12.0
1727/12/6	12:08	17.5	18.5
1727/12/28	10:41	25.0	26.0
1728/1/24	8:55	34.0	34.0
1728/2/10	7:48	38.0	37.0
1728/3/7	6:06	39.0	39.0
1728/3/24	4:59	37.0	38.0
1728/4/6	4:08	36.0	36.5
1728/5/6	2:10	28.5	29.5
1728/6/5	0:12	18.5	20.0
1728/6/15	23:29	17.5	17.0
1728/7/3	22:18	11.5	11.5
1728/8/2	20:20	4.0	4.0
1728/9/6	18:02	0.0	0.0

観測日時		赤緯の変化 (単位: ")	
日付	時刻	観測値	計算値
1727/9/14	13:21	29.5	28.5
1727/9/24	12:42	24.5	25.5
1727/10/16	11:15	19.5	19.5
1727/11/11	9:33	11.5	10.5
1727/12/14	7:23	4.0	3.0
1728/2/17	3:08	2.0	3.0
1728/3/21	0:58	11.5	10.5
1728/4/16	23:12	18.5	18.0
1728/5/5	21:57	24.5	23.5
1728/6/5	19:55	32.0	31.5
1728/6/25	18:37	35.0	34.5
1728/7/17	17:10	36.0	36.0
1728/8/2	16:07	35.0	35.5
1728/9/20	12:55	26.5	26.5

表2 1780年時点での真位置と歳差

恒星名	赤経	北極距離角	歳差	
			赤経	北極距離角
りゅう座 $\gamma$ 星	267° 52' 41.2"	38° 28' 38.8"	20.56"	+0.78"
大熊座 $\eta$ 星	204° 43' 2.6"	39° 34' 56.8"	36.08"	+18.24"

$$\delta = \delta_0 + p \cos \alpha_0 \sin \varepsilon \quad (27)$$

本報では時刻の起点を太陽と同じく1727年3月10日3:38 (春分) とし、この時点で2つの恒星は上記6.3で示した位置にあったとして計算を進める。従って、春分から $n$ 日後の赤緯・赤経は以下となる。

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{np}{D_s} (\cos \varepsilon + \sin \alpha_0 \tan \delta_0 \sin \varepsilon) \quad (28)$$

$$\delta = \delta_0 + \frac{np}{D_s} \cos \alpha_0 \sin \varepsilon \quad (29)$$

以上から得られた $\lambda_s$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ を式(23)に代入すれば赤緯の変化 $\Delta\delta$ を算出できる。

## 6.5 計算結果の比較

りゅう座 $\gamma$ 星の計算結果を図8に示す。前述のように縦軸は赤緯の南側 (赤緯のマイナス側) への変化量である。このため、式(23)で計算される $\Delta\delta$ の最大値を $\Delta\delta_{max}$ として、最大値と各計算値との差異 ( $\Delta\delta_{max} - \Delta\delta$ ) をプロットしてある。ブラッドリーは計算を $1/2''$  ( $0''.5$ ) の精度で打ち切っている。これは、観測値の精度に合わせて計算をおこなったものと推定される。ブラッドリーの計算値との比較のため、本報の計算値も同じ精度で算出した。ブラッドリーの計算値については表1Aの値をそのままプロットしてある。差異を明確にするため、図9にブラッドリーの計算値と本報の計算値との差異を示す。縦軸は、(本報計算値) - (ブラッドリー計算値) である。

一方、大熊座 $\eta$ 星の計算結果を図10に示す。こちらの縦軸は通常の北側 (赤緯のプラス側) への

変化量である。このため、式(23)で計算される $\Delta\delta$ の最小値を $\Delta\delta_{min}$ として、各計算値と最小値との差異 ( $\Delta\delta - \Delta\delta_{min}$ ) をプロットしてある。ブラッドリーの計算値については表1Bの値をそのままプロットしてある。りゅう座 $\gamma$ 星と同様に図11に計算値の差異を示す。

いずれの結果もブラッドリーの計算結果とほぼ一致した。差異は小さく以下のようなものである。

- ・ りゅう座 $\gamma$ 星 : 最大差異1".0, 差異の絶対値の平均0".33
- ・ 大熊座 $\eta$ 星 : 最大差異1".5, 差異の絶対値の平均0".39

計算値同士の比較であるので、本来は正確に一致すべき性質ものである。しかし、図9と図11から明らかなように、約半数の計算値は正確に一致しているが、残りについては若干の差異がある。この原因としては、使用した天文学上の基礎データの違い、特に、恒星の真の位置の違いが推定される。ブラッドリーの場合は、観測時点(1728年)での実際の観測値(恒星の真の位置、歳差の年次変化)を利用している。これに対し、本報では観測時点から52年後の観測値から推定しているため、差異が生じたと推定する。

使用した基礎データの違いにもかかわらず、差異の平均が1"以内にとどまっている。従って、ブラッドリーの計算値はほぼ再現できたと判断する。

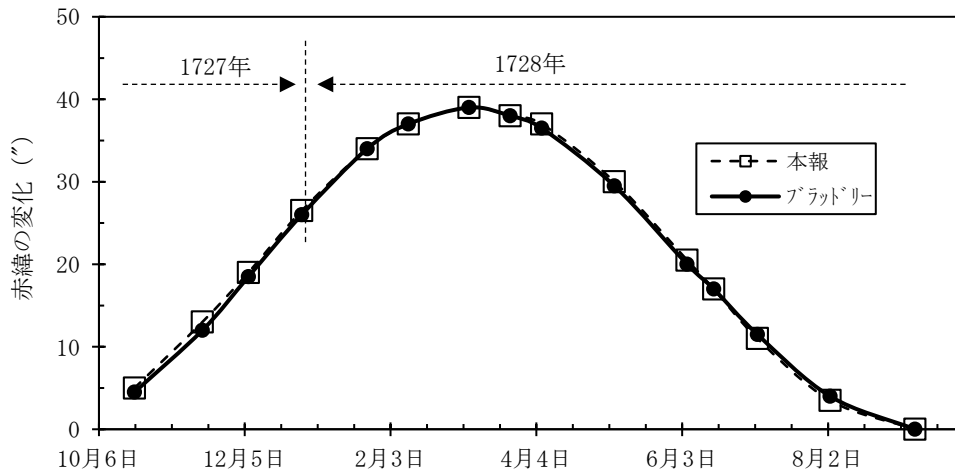


図8 りゅう座 $\gamma$ 星の計算結果の比較

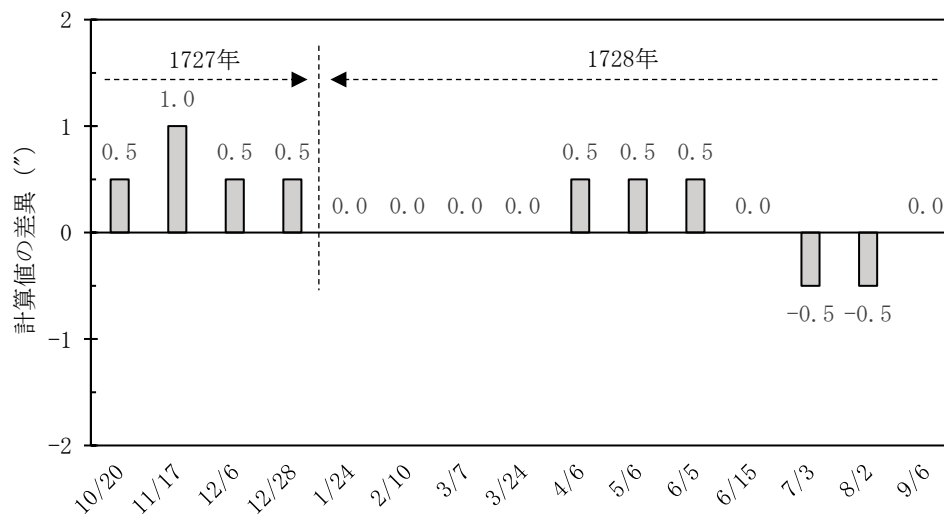
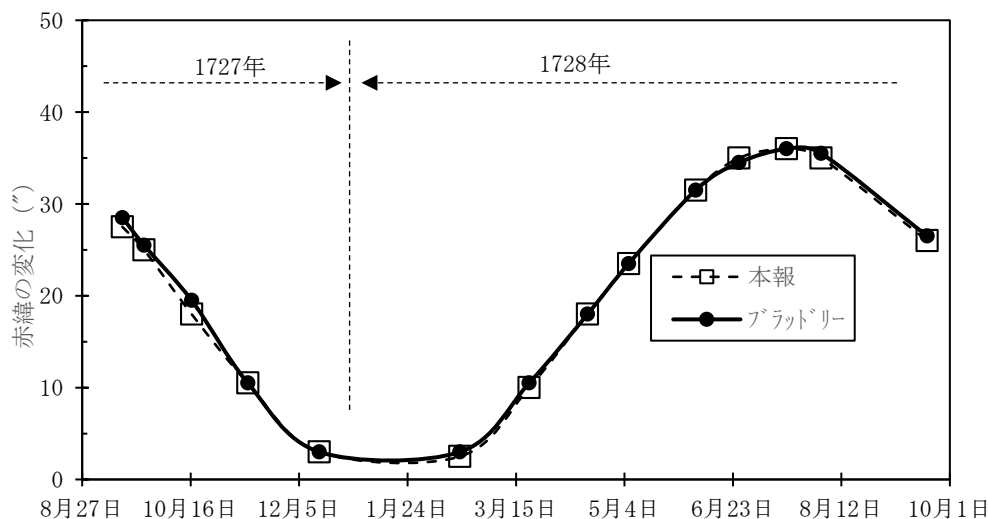
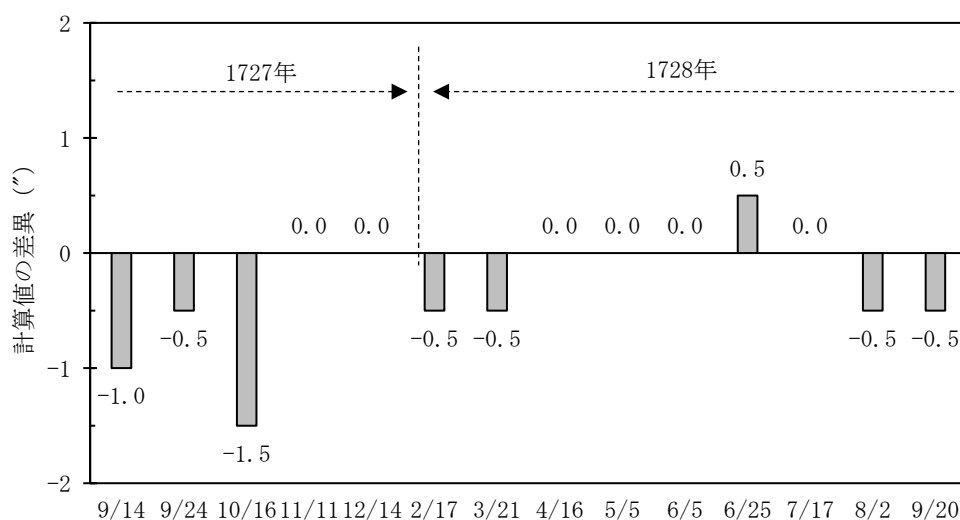


図9 りゅう座 $\gamma$ 星の計算値の差異：[本報]－[ブラッドリー]

図10 大熊座  $\eta$  星の計算結果図11 大熊座  $\eta$  星の計算値の差異：[本報]－[ブラッドリー]

## 7. まとめ

本稿においては、球面三角法には一切触れず、初歩的な線形代数のみを使用して光行差計算の詳細を解説した。光行差現象によって恒星の位置は地球の運動方向にずれる。また、この運動は円運動であり、運動方向は変化する。一方、恒星の位置変化は、地上からの観測では赤経・赤緯の変化（赤道座標系での変化）として検出される。従って、観測のためには変化する地球の運動方向を赤道座標系で表す必要がある。この手段として、本報では座標変換を用いた。つまり、光行差現象と地上からの観測をつなぐ手段として座標変換を採用した。

さらに、具体例として、ブラッドリーが原著論文に掲載している計算値の再現を試みた。論文中に記載がないため、天文学上の基礎データや計算式を推定して計算を実施したが、差異の平均が1"以内でブラッドリーの計算値を再現できた。

なお、本報の執筆に当たっては、愛知教育大学の高橋真聡氏より助言を頂いた。また、国立天文

台からはブラッドリーの観測時における当該恒星の子午線通過時刻のデータを提供頂いた。ここに謝意を表す。

## 参考文献

- 1) BRADLEY, J.: A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and FRS to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 35.406: p637-661, 1729
- 2) BRADLEY, J.: A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and FRS to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 35.406: p651, 1729
- 3) BRADLEY, J.: A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and FRS to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 35.406: p652, 1729
- 4) 長沢 工: 天体の位置計算, 地人書館, p69, 1985
- 5) 長沢 工: 天体の位置計算, 地人書館, p69-70, 1985
- 6) 長沢 工: 天体の位置計算, 地人書館, p82, 1985
- 7) BRADLEY, J.: A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and FRS to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 35.406: p656, 1729
- 8) BRADLEY, J.: A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and FRS to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 35.406: p658, 1729
- 9) BRADLEY, J.: A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and FRS to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 35.406: p642, 1729
- 10) Jean Meeus: "Astronomical Tables of the Sun, Moon, and Planets", Willmann-Bell, 1983
- 11) 天文年鑑 2021, 誠文堂新光社, p200, 2020
- 12) BRADLEY, J.: A letter from the Reverend Mr. James Bradley Savilian Professor of Astronomy at Oxford, and FRS to Dr. Edmond Halley Astronom. Reg. &c. giving an account of a new discovered motion of the fix'd stars, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 35.406: p653, 1729
- 13) フラムスティード天球図譜, 恒星社厚生閣, 1980

## 付録1: $\sin \theta \sin v$ の算出

前述のように、平面 OPA と平面 OAC のなす角を  $v + 90^\circ$  とした。平面同士のなす角を直接求めるのは困難であるので、それぞれの平面の法線ベクトル間の角度を求める。さらにこれら 2 つのベクトルの内積から  $\sin \theta \sin v$  を求める。

### 1. 法線ベクトル

3 点 P, A, C と平面 OPA, 平面 OAC を取り出して描くと図 A のようになる。

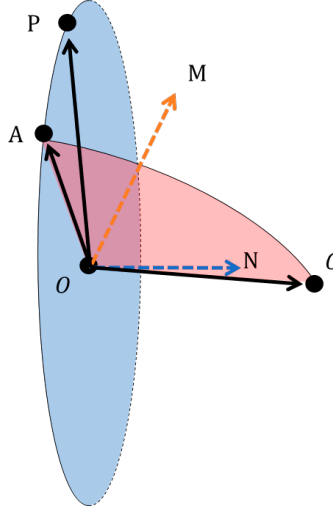


図 A 3 点 P, A, S の位置関係

図中の M は平面 AOC の法線方向であり、N は平面 PAO の法線方向である。ここで、外積  $\vec{m} = \vec{OA} \times \vec{OC}$  を考えると、これは M 方向のベクトルであり平面 AOC の法線となっている。同様に外積  $\vec{n} = \vec{OP} \times \vec{OA}$  は N 方向のベクトルであり、平面 PAO の法線となっている。各ベクトルの成分は、

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (1-1)$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1-2)$$

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} L_C \\ M_C \\ N_C \end{pmatrix}, \quad (1-3)$$

であるので、 $\vec{m}$  の成分は、

$$\vec{m} = \vec{OA} \times \vec{OC} = \begin{pmatrix} N_C \cos \delta \sin \alpha - M_C \sin \delta \\ L_C \sin \delta - N_C \cos \delta \cos \alpha \\ M_C \cos \delta \cos \alpha - L_C \cos \delta \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (1-4)$$

一方、C 点は黄道上を移動する点で、どの位置でもすべての恒星に対して  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$  である。従って、大きさは、

$$|\vec{m}| = |\vec{OA} \times \vec{OC}| = |\vec{OA}| |\vec{OC}| |\sin \theta| = \sin \theta. \quad (1-5)$$

同様に、

$$\vec{n} = \vec{OP} \times \vec{OA} = \begin{pmatrix} -\cos \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

$$|\vec{n}| = |\vec{OP} \times \vec{OA}| = |\vec{OP}| |\vec{OA}| |\sin(90^\circ - \delta)| = \cos \delta \quad (1-7)$$



## 2. 内積

2つの法線ベクトル $\vec{m}$ と $\vec{n}$ の内積を考える。この2つのベクトルを挟む角度は $90^\circ - \nu$ であるので、

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| |\vec{n}| \cos(90^\circ - \nu). \quad (1-8)$$

上記1の結果を代入すると、以下の式が得られる。

$$\sin \theta \sin \nu = L_C \sin \delta \cos \alpha + M_C \sin \delta \sin \alpha - N_C \cos \delta. \quad (1-9)$$

$\lambda_C = \lambda_S - 90^\circ$ であるので、

$$\begin{pmatrix} L_C \\ M_C \\ N_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \lambda_S \\ -\cos \lambda_S \cos \varepsilon \\ -\cos \lambda_S \sin \varepsilon \end{pmatrix}.$$

これを代入すると、 $\sin \theta \sin \nu$ の表式(22)が得られる。

$$\sin \theta \sin \nu = \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda_S - \sin \alpha \sin \delta \cos \lambda_S \cos \varepsilon + \cos \delta \cos \lambda_S \sin \varepsilon. \quad (1-10)$$

以上

## 付録2: 歳差による赤経・赤緯の変化

歳差による変化については, 1 太陽年後において黄道座標系では黄経 $\lambda_0$ のみが $\lambda_0 + p$ に変化し, 黄緯 $\beta_0$ は変化しない. これに対応する赤経・赤緯の変化を求めればよい.

1 太陽年後の赤経・赤緯の変化量をそれぞれ $d\alpha$ ,  $d\delta$ とする. また, 赤道座標系における恒星の元の座標値を $(L, M, N)$ , 1 太陽年後の座標値を $(L', M', N')$ とする. 変化量が微小量であるとして展開すると,

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta_0 + d\delta) \cos(\alpha_0 + d\alpha) \\ \cos(\delta_0 + d\delta) \sin(\alpha_0 + d\alpha) \\ \sin(\delta_0 + d\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + d\delta \begin{pmatrix} -\sin \delta_0 \cos \alpha_0 \\ -\sin \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \end{pmatrix} + d\alpha \cos \delta_0 \begin{pmatrix} -\sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2-1)$$

一方, 黄道座標系では,

$$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_0 \cos(\lambda_0 + p) \\ \cos \beta_0 \sin(\lambda_0 + p) \\ \sin \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \cos \beta_0 \sin \lambda_0 \\ \cos \beta_0 \cos \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2-2)$$

さらに, 黄道座標系から赤道座標系への変換 (座標回転) により,

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta_0 \sin \lambda_0 \\ \cos \beta_0 \cos \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2-3)$$

ここで, 右辺の $\cos \beta_0 \sin \lambda_0$ と $\cos \beta_0 \cos \lambda_0$ の書き換えを検討する. 本文の式(10), (11), (12)より,

$$\cos \delta_0 \cos \alpha_0 = \cos \beta_0 \cos \lambda_0, \quad (2-3)$$

$$\cos \delta_0 \sin \alpha_0 = \cos \beta_0 \sin \lambda_0 \cos \varepsilon - \sin \beta_0 \sin \varepsilon, \quad (2-4)$$

$$\sin \delta_0 = \cos \beta_0 \sin \lambda_0 \sin \varepsilon + \sin \beta_0 \cos \varepsilon. \quad (2-5)$$

まず, 式(2-3)によって $\cos \beta_0 \cos \lambda_0$ は $\cos \delta_0 \cos \alpha_0$ に置き換わる.  $\cos \beta_0 \sin \lambda_0$ については, 式(2-4), (2-5)が $\cos \beta_0 \sin \lambda_0$ と $\sin \beta_0$ の連立方程式とみなして解くと以下の関係となる.

$$\cos \beta_0 \sin \lambda_0 = \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \cos \varepsilon + \sin \delta_0 \sin \varepsilon. \quad (2-6)$$

これらの関係を代入すると,

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \cos \varepsilon + \sin \delta_0 \sin \varepsilon \\ \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \cos \varepsilon \\ \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \sin \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (2-7)$$

式(2-1)と式(2-7)を比較すると, 変化分同士は等しいので,

$$d\delta \begin{pmatrix} -\sin \delta_0 \cos \alpha_0 \\ -\sin \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \end{pmatrix} + d\alpha \cos \delta_0 \begin{pmatrix} -\sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \cos \varepsilon + \sin \delta_0 \sin \varepsilon \\ \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \cos \varepsilon \\ \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \sin \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (2-8)$$

z成分の比較より

$$d\delta = p \cos \alpha_0 \sin \varepsilon. \quad (2-9)$$

y成分の比較より,

$$d\alpha = \frac{p}{\cos \delta_0} (\cos \delta_0 \cos \varepsilon + \sin \delta_0 \sin \alpha_0 \sin \varepsilon) = p (\cos \varepsilon + \sin \alpha_0 \tan \delta_0 \sin \varepsilon). \quad (2-10)$$

以上