

トランザクション消滅を考慮した
待ち行列系の確率的最適制御に関する研究

2000 年 6 月

白井 健二

論文要旨

近年、産業界における製造業、電気通信業さらに社会システムとしての交通システムにおいて、それぞれの分野でシステムの性能低下を引き起こす要因としてトランザクション消滅が問題となっている。

例えば、電気通信業では、テレフォンショッピングにおいて通販会社に商品購入の電話をかけた際、話中状態で顧客が商品購入を諦めるという事態が発生する。このような事態が起きる要因としては、予測を超える急激な呼量が同時にある交換機に集中することが考えられる。このことにより通販会社にとっては、「不利益」をもたらす結果となる。また、通信システムにおける構内 LAN(Local Area Network) 上でのトランザクション同士の衝突により、ユーザ端末から送出された情報が通信先に届かないことが問題となっている。

トランザクション消滅とは、入力されたトランザクションが期待される出力の以前に、系外に出力されるトランザクションのことをいう。

本論文では、製造業における「不良品発生」、電気通信業における「電話が話中になり、顧客が商品購入を諦めること」、また「ユーザ端末から送出された情報が通信先に届かないこと」さらに、交通システムにおける「本来目的とする出口とは異なる出口で降りること」等を、「トランザクション消滅」という事象で統一的に扱うことにした。

本研究では、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系を確率システムとして取り扱い、さらに系全体を一つの「バーチャルパイプライン」という仮想的な待ち行列として取り扱った。

まず、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系について、計数過程を用いてモデル化を行った。このモデルをもとに定常状態において、トランザクション消滅がシステムにどのような影響を与えるかについて解析した。その結果、システム定常分布(幾何分布)を求め、その唯一存在条件も併せて求めた。さらに、この定常分布を利用することにより、入力されたトランザクションの定常処理時間(システム処理時間)を求めた。

本システムの性能に与える要因は、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響することを明らかにした。さらに、シミュレーション実験により確かめた。こ

**The Stochastic Optimal Control
for Queuing System with Transaction Losses**

June 2000

Kenji Shirai

目次

1 序論	1
1.1 研究背景と目的	1
1.2 研究の位置付け	2
1.3 本論文の構成	4
2 トランザクション消滅のある待ち行列系の定常解析	10
2.1 まえがき	10
2.2 確率過程について	11
2.2.1 計数過程について	11
2.2.2 非定常ポアソン過程	14
2.3 対象システム及び解析モデルについて	16
2.3.1 入出力及び, 消滅トランザクションの計数過程について	16
2.3.2 入出力及び, 消滅トランザクション F_i -強度	18
2.4 システム定常分布	19
2.5 システム定常解析	21
2.6 シミュレーション結果およびその考察	24
2.7 まとめ	30
3 有限個のトランザクション消滅を考慮した待ち行列系の定常解析	33
トランザクション消滅過程の定常系内処理時間について	
3.1 まえがき	33
3.2 対象システム及び解析モデルについて	34
3.2.1 入出力および, 消滅トランザクションの計数過程について	34
3.2.2 入出力および, 消滅トランザクションのレート	37
3.2.3 システム定常分布	38
3.2.4 定常時における平均処理時間	41

のにより、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系に対し、その容量設計のための有用な手法を示すことが出来た。

つぎに、トランザクション消滅を有限個に限定した場合のモデル化に、ジャンプ型確率微分方程式を導入した。有限個のトランザクション消費に要する処理を考慮したシステム処理時間は、現実のシステム設計に有力な結果を示した。

さらに、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系のシステム評価として「収益」(収益率)が考えられる。本論文では、「収益」(収益率)をシステム評価として表現するために、ファイナンス論的評価関数を導入した。評価関数を表現するのに、マルコフ性を維持したジャンププロセスを導入した。これは、ジャンププロセスが資産の変動を表現するのに有効な手法であると考えられるからである。

その結果、収益率の高いルートに、より多くの入力トランザクションを配分すれば良いことを示し、本システムに対する最適制御方策は、「切換え制御方式」になることを示した。さらに、このシステムを構築するにあたっては、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系の待ち行列容量制限値が最適制御関数を拘束することも示した。

最後に、トランザクション消滅を考慮した並列 N 個の待ち行列系に対して、入力トランザクションの獲得確率の平均と分散が与えられている場合、トランザクション流通量を最大にするための最適配分を決定する問題を提示した。本論文では、トランザクション消滅を考慮した N 個の並列待ち行列系を考え、入力トランザクションのロス確率及び獲得確率を定義した。この獲得確率の変動が、伊藤型確率微分方程式により表されることをある条件のもとで示し、適当な評価関数のもとで最適配分係数は、獲得確率(ロス確率)の確率的性質にのみ依存することを明らかにし、さらに、定常モデルに対する最適配分係数を求め、数値実験により妥当性を確かめた。

研究業績..... 103

3.3	シミュレーション結果およびその考察	44
3.4	まとめ	50
4	ファイナンス論的評価による待ち行列系の最適制御	53
	ー収益レートに対する最適性の条件ー	
4.1	まえがき	53
4.2	対象システム及び解析モデルについて	54
4.2.1	対象システム及び最適条件について	54
4.2.2	切り替え制御とその評価関数について	59
4.2.3	最適条件	61
4.3	まとめ	64
5	トランザクション消滅のある待ち行列系の最適配分法	67
	ーファイナンス論的アプローチー	
5.1	まえがき	67
5.2	対象システム及び動的配分係数の決定について	68
5.2.1	システム記述	68
5.2.2	動的配分係数の決定	73
5.2.3	定常モデルに対する配分係数の決定	76
5.3	数値計算例	81
5.4	まとめ	85
6	結論	88
	付録	91
	謝辞	102

表一覽

3.1 トランザクション消滅 C^* と流通係数 L の関係 45

図一覧

1.1	研究分野の全体概要	6
2.1	計数過程 $\{N(t)\}$ の標本路	12
2.2	システム概念図	17
2.3	入出力過程	23
2.4	平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果	26
2.5	平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果	27
2.6	平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果	28
2.7	トランザクション消滅 (C^*) とパラメータ (L) との関係	29
3.1	入出力過程	35
3.2	平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果	47
3.3	平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果	48
3.4	平均処理時間に関するシミュレーション及び数値計算結果	49
4.1	各入力設備から中央設備へのトランザクション流通概念図	58
5.1	システム概念図	70
5.2	システム等価図	71
5.3	2 経路時の配分係数	83
5.4	2 経路時の獲得確率及び出力トランザクション数	84
5.5	3 経路時の配分係数	85
5.6	3 経路時の獲得確率及び出力トランザクション数	86

第 1 章

序論

1.1 研究背景と目的

本論文では、「トランザクション消滅」を考慮した待ち行列系を確率的なシステムとして扱うことにより、システム全体の最適化という課題について検討した結果を述べる。

近年、産業界における製造業、電気通信業さらに社会システムとしての交通システムにおいて、それぞれの分野でシステムの性能低下を引き起こす要因としてトランザクション消滅が問題となっている。

例えば「不良品の発生」をトランザクション消滅と考える場合においては、その要因として「原材料の不良」，「生産設備システムの不具合」および「人的ミス」等が考えられる。一般に、品質管理者は、品質評価基準のもとに、ある時間間隔毎に不良品発生率を管理している。ところが、不良品の発生要因が一定していないことより、不良品発生率が不確実性を有する事象となり、確定的に基準値を管理することが困難である場合が多い。このように、「不良品の発生」は製造業者にとって大きな「不利益」をもたらすことになる。

一方、電気通信業では、テレフォンショッピングにおいて通販会社に商品購入の電話をかけた際、話中状態で顧客が商品購入を諦めるということ態が発生する。このような事態が起きる要因としては、予測を超える急激な呼量が同時にある交換機に集中することが考えられる。このことにより通販会社にとっては、「不利益」をもたらす結果となる。また、通信システムにおける構内 LAN(Local Area Network) 上でのトランザクション同士の衝突により、ユーザ端末から送出された情報が通信先に届かないことが問題となっている。

この問題の要因としては、システムのクライアント端末からのトランザクションが、同時にかつ急激に発生することが考えられる。あるいは、構内 LAN の通信容量自身に問題がある場合も考えられる。これらの問題は、システム利用者に「不利益」をもたらす

結果となる。

さらに、交通システムにおいては、高速道路本線上の「渋滞」が同様の問題として存在する。この「渋滞」の原因としては、急激な交通量が高速道路に流入することが考えられる。また、他の要因としては、高速道路本線上での「車両事故」，「車両故障」等が考えられる。

それゆえ、高速道路の利用者は、本来目的とする出口とは異なる出口で降りて、一般街路を利用する場合がある。やはり、この「渋滞」という問題は、高速道路利用者に「不利益」をもたらす結果となる。

本研究では、製造業における「不良品発生」，電気通信業における「電話が話中になり、顧客が商品購入を諦めること」，また「ユーザ端末から送出された情報が通信先に届かないこと」さらに、交通システムにおける「本来目的とする出口とは異なる出口で降りること」等を、「トランザクション消滅」という事象で統一的に扱うことにする。

以上、「トランザクション消滅」が起きる要因が不確実性を有していることより、「トランザクション消滅」そのものも当然、不確実な事象となる。それゆえ、「トランザクション消滅」を確率事象と認識し、システム性能への様な影響を与えるかを解析することが、システム全体の最適化を実現することになるからである。

1.2 研究の位置付け

過去の研究において、確率システムとしての待ち行列系の最適制御問題を扱った研究は数多く成されている。システムの最適化を扱うためには、最初にシステムの動作を表現するための数学的な確率モデルが必要となる。そのために、確率過程における点過程、計数過程を用い、マルチンゲール理論を導入して動的な点過程システムのモデルが提案されている。このモデルをもとに動的計画法を活用して入出力レートを制御変数とすることにより、ある評価関数のもとに最適制御法則が求められている[1]～[15]。

対象システムとしては、一般的な待ち行列系を意識したもの、あるいはコンピュータシステムとネットワークシステムを意識したものがある。ただし、トランザクション消滅を扱った報告はない。

また、製造業のシステムを対象とした報告がある。これらも同様に、点過程、計数過程、マルチンゲール理論を活用してモデル化を行っている。最適解を求める制御手法としては、ラグランジュの未定定数法を用いて最適制御法則を求めている[16]～[18]。これは、製品の受発注業務における最適在庫、製造工程における最適問題等を扱った研究である。これらの研究での評価関数としては、システムの性能に着目した評価関数であり、システム全体の収益を評価対象としてファイナンス理論[19]～[21]を応用した評価関数を用いた報告はない。

一方、通信システムにおいては、呼損を考慮した通信トラフィックの最適配分に関する研究がある[22]。また、通信ネットワークに関するトラフィック配分に関して、通信遅延を考慮した研究が報告されている[23]。いずれも、過去の研究においては、トランザクション消滅を取り扱った研究はない。また、入力トランザクションの平均・分散が与えられた場合、ある「期」毎の入力トランザクションの最適配分に関する研究もない。

以上のような背景から本論文では、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系を確率システムとして取り扱うことにする。また、本研究の中で、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系全体を一つの「バーチャルパイプライン」という仮想的な待ち行列として取り扱っているが、これは、システム内に存在する複数の待ち行列を一つの待ち行列として仮想的に扱い、かつ本来の機能をそこなうことなく、システム全体のモデル化がわかり易く出来るからである。

まず、本論文では、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系に対してのモデル化を行い、このモデルより、システム定常分布及び、その存在条件を求める。また、その定常分布は、幾何分布であることも明らかにする。

つぎに、トランザクション消滅を有限個に限定した場合のモデル化に、ジャンプ型確率微分方程式を導入し、システム定常分布および定常時における平均処理時間を求める。また、有限個のトランザクション消費に要する処理を考慮したシステム処理時間は、現実のシステム設計に有力な結果であることを示す。

さらに、システムの機能・性能だけではなく、「設備も含めたシステム全体としての収益がどれだけ得られるのか」と言う新たな命題に対して、ファイナンス理論の考え方を評価関数に導入することで、この問題を解決する。

最後に、トランザクションを並列ルートに分配する際、「入力トランザクションの獲得確率の平均と分散が与えられている」という場合を想定し、ファイナンス理論を活用することにより、システムを流通するトランザクション数が最大となるような最適配分法を理論的に求める。

1.3 本論文の構成

本論文の構成を以下に述べる。

第 2 章では、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系のモデル化を行う。モデル化の手法としては、確率過程における点過程論をベースに、計数過程を活用する。モデル化の前提条件として、入出力過程及びトランザクション消滅過程を各々独立したポアソン過程とした。

まず、定常状態において、トランザクション消滅がシステムにどのような影響を与えるかについて解析する。つぎに、その解析結果より、システム定常分布(幾何分布)およびその唯一存在条件を求める。さらに、この定常分布より、入力されたトランザクションの定常滞留時間(システム滞留時間)を求める。

以上より、本システムの性能に与える要因は、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響することを明らかにする。さらに、シミュレーション実験により定常状態での解析結果を検証する。

第 3 章では、有限個のトランザクション消滅を考慮した待ち行列系のモデル化を行う。モデル化の手法としては、第 2 章と基本的には同じ手法であるが、有限個のトランザクション消滅のモデル化にはジャンプ型確率微分方程式を導入する。モデル化の前提条件として、入出力過程及びトランザクション消滅過程を各々独立したポアソン過程とした。

まず、定常状態において、有限個のトランザクション消滅がシステムにどのような影響を与えるかについて解析する。つぎに、解析結果より、システム定常分布(幾何分布)およびその唯一存在条件を求める。さらに、この定常分布より、入力された有限個のトランザクションの定常処理時間(システム処理時間)を求める。

以上より、本システムの性能に与える要因は、有限個のトランザクション消費に費や

される時間が最も大きく影響することを明らかにし、第 2 章で述べた結果より現実のシステムに近い結果を示す。さらに、シミュレーション実験により定常状態での解析の検証も行っている。

第 4 章では、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系のシステム評価として「収益」という観点から見た場合の最適性の条件を求める。本章では、評価関数として、ある時間的幅を有した期間内での資産の最大化として定式化する。評価関数には、マルコフ性ジャンププロセスを導入し、制御変数には、「収益率」を採用する。

また、収益を最大とする最適問題を解くことにより、収益率の高いルートに、より多くの入力トランザクションを配分すれば良いことを示し、本システムに対する最適制御方策が、「切り換え制御方式」であることを述べる。さらに、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系の待ち行列容量制限値が、最適制御関数を拘束することも示す。

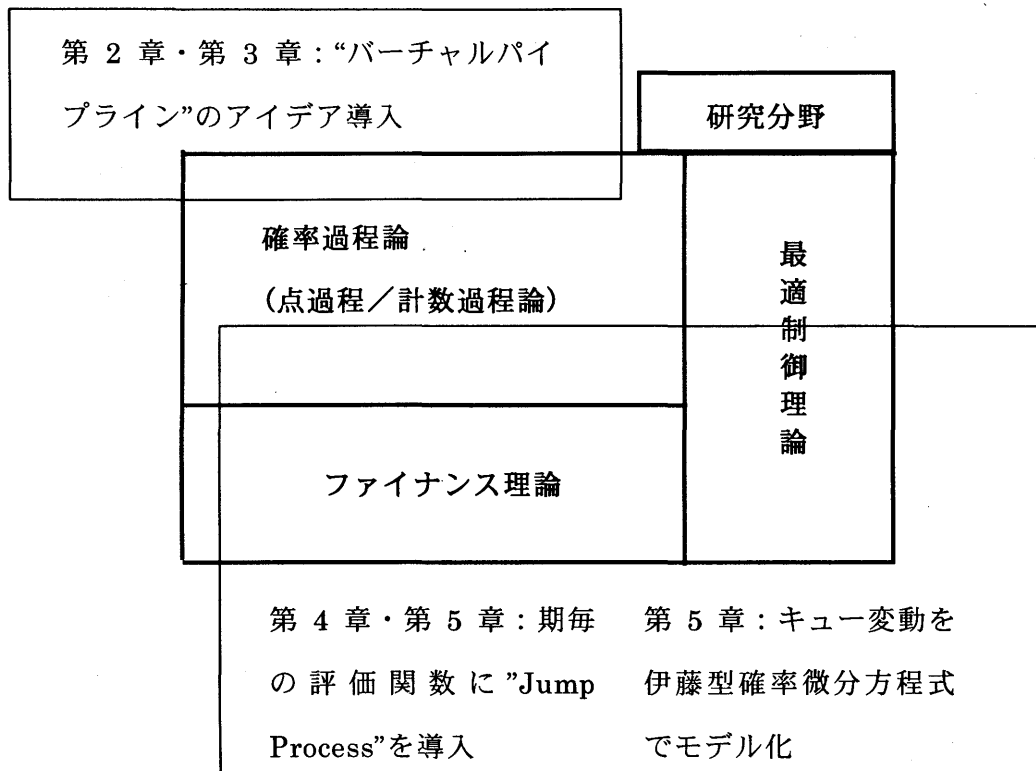
第 5 章では、トランザクション消滅を考慮した並列 N 個の待ち行列系に対して、入力トランザクションの獲得確率の平均と分散が与えられている場合、トランザクション流通量を最大にするための最適配分を求める。本章では、出力側から入力側に注目した場合、各ルート上のトランザクションレートそのものの変動、上記のゲートウェイでの破棄、トランザクション消滅及び各ルート固有の特性で出力側が影響を受けることを明らかにする。

つぎに、各ルートの変動は、伊藤型確率微分方程式で表されることをある条件のもとで確認する。また、システムの最適問題としては、対象システムに流入するトランザクションが出力側へ最大限に送出される制御問題を定式化し、最適制御関数を導く。

その結果、入力トランザクションのロス確率及び獲得確率を定義することにより、獲得確率の変動が伊藤型確率微分方程式に従うものとすれば、最適配分係数は、獲得確率（ロス確率）の確率的性質にのみ依存することを明らかにし、定常モデルにおいて最適な配分係数を求める。最後に、数値実験により本提案の有効性を確認する。

最後に第 6 章で本研究を総括する。

図 1.1 に、第 2 章から第 5 章での記述内容と各研究分野の関係を示す。



第2章：「トランザクション消滅のある待ち行列系の定常解析」
第3章：「有限個のトランザクション消滅を考慮した待ち行列系の定常解析 ートランザクション消滅過程の定常系内処理時間についてー」
第4章：「ファイナンス論的評価による待ち行列系の最適制御 ー収益レートに対する最適条件ー」
第5章：「トランザクション消滅のある待ち行列系の最適配分法 ーファイナンス論的アプローチー」

図 1.1 研究分野の全体概要

Figure1.1 The major background theories in my research

参考文献

- [1] P. BRÉMAUD "Point process and queues martingale dynamics", pp87, p117, pp. 123-127, Springer-Verlag, New York Inc. 1981
- [2] G.P KLIMOV, "Time Sharing Service Systems I", Theory of Probability and It's Appl. 19 pp. 532-551, 1974
- [3] J.G SHANTHIKUMAR and D.D YAO, "Stochastic monotonicity of the queue lenghs in closed queuing networks", Operations Research 35 pp. 583-588, 1987
- [4] F. BACCELLI, P. BOYER, and G. HEBUTERNE, "A single-server queue with impatient customers", Advances in Applied Probability, vol. 16, pp. 887-905, 1984.
- [5] R.RISHEL, "Dynamic programming and minimum principles for systems with jump Markov disturbances", SIAM J. Contr., vol. 13, pp. 338-371, Feb. 1975.
- [6] ADRIAN SEGALL, THORMAS KAILATH, "The Modeling of Randomly Modulated Jump Process", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-21, No.2 pp. 135-143, March 1975.
- [7] P. BRÉMAUD, "Optimal Thinning of a Point Process", SIAM J, CONTROL AND OPTIMIZATION vol. 17, No. 2, March pp. 223-230, 1979
- [8] D.W TCHA and S.R PLISKA, "Optimal control of single-server queuing networks and multi-class M/G/1 queues with feedback", Operations Research 25 pp. 248-258, 1977
- [9] Z. ROSBERG, P. VARAIYA, and J. WARLAND, "Optimal control of service in tandem queues", IEEE Trans. Autom. Cont. vol. AC-27, pp. 600-610, 1982.
- [10] P. NAIN and K.W. ROSS, "Optimal priority assignment with hard constraint", IEEE Trans. Autom. Cont. AC-31, 10 pp. 882-888, 1986
- [11] COSTAS A. COURCOUBETIS and MARTIN I. REIMAN, "Optimal control of a simultaneous service requirements", IEEE Trans. Autom. Cont. vol. AC-32, No. 8, pp. 717-727, Aug. 1987.

- [12] HONG CHEN, "Optimal Intensity Control of a Multi-Class Queue" *Queueing Systems*, vol. 5, pp. 281-294, 1989
- [13] LAWRENCE M. WEIN, "Optimal control of a two-station brownian network", *Mathematics of operations research*, vol. 15, No. 2. pp. 215-242, May, 1990.
- [14] J.M HARISSON, "Dynamic Scheduling of a Multi-Class Queue: Discount Optimality" *Operations Research* 23 pp. 270-282, 1975
- [15] R.F. HARTL and P.M. KORT, "Marketable Permit in a Stochastic Dynamic Model of the Firm", *Journal of Optimization and Application*: vol.89, No.1 pp. 129-155, 1996
- [16] RAMAKRISHNA AKELLA and P.R. KUMAR, "Optimal Control of Production Rate in a Failure Prone Manufacturing System", *IEEE Trans. Autom. Cont.* vol. AC-31, No.2, pp. 116-126, February 1985
- [17] J.G. KIMEMIA and S.B. GERSHWIN, "An algorithm for the computer control of production in flexible manufacturing systems", *IEEE Trans. Autom. Cont.* vol. AC-15, pp. 353-362, Dec. 1983.
- [18] W.H. FLEMING, S.P. SETHI, and H.M. SONER, "An optimal stochastic production planning problem with randomly fluctuating demand", *SIAM, J. Contr. Optim.* vol. 25, pp. 1494-1502, 1987.
- [19] 宮武信春:「ファイナンス理論のなかの最適制御則」 *計測と制御*, vol.30, No. 7, pp. 616-622, 1991年7月
- [20] 沢木勝茂:「ファイナンス数理」 pp. 87-143, 朝倉書店, 1994年12月
- [21] JUDD, K.L., and PETERSEN, B.C., "Dynamic Limit Pricing and Internal Finance", *Journal of Economic Theory*, vol. 39, pp. 369-399, 1986.
- [22] M.H. KALLMES and C.G. CASSANDRAS, "Two approaches to optimal routing and admission control in systems with real-time traffic", *J. of Optimization Theory and Applications*: vol. 84, No. 2, pp. 311-338, Feb. 1995.
- [23] C.G. CASSANDRAS, M.V. ABIDI, and D. TOWSLEY, "Distributed routing with on-line marginal delay estimation", *IEEE Transactions on communications*, vol.

38, pp. 348-359, 1990.

第 2 章

トランザクション消滅のある待ち行列系の定常解析

2.1 まえがき

第 1 章で述べたように，トランザクション消滅とは，入力されたトランザクションが期待される出力の以前に，系外に出力されるトランザクションのことをいう。トランザクション消滅が，システム性能全体に大きな影響を与えることは良く知られている。トランザクション消滅が，システム全体にどのように影響されるかを解析することは重要である。

近年，確率過程における点過程，計数過程を用いた研究には，待ち行列システムに対するモデル化，これをもとにした解析がなされている。さらに，最適制御問題に対して，現代制御理論を用いて最適制御解を求めている[1]～[8]。特に，マルチンゲール理論を待ち行列系に適用したことは，定常状態におけるシステム解析の分野に貢献をもたらした。

待ち行列系のモデル化に関しては，P. BRÉMAUD は，確率過程における点過程，計数を用いて待ち行列系のモデル化を行っている。さらに，最適制御問題に対して，入出力レートを制御することにより，ある評価関数のもとに制御理論における動的計画法を適用することにより最適解を求めている[1]。

一方，箕輪は，トークンリング型ネットワークに対してモデル化を提案している。モデル化の手法としては，データの入力と出力は点過程，計数過程を用い，トークンそのもののモデル化にジャンプ型確率微分方程式を導入している。トークンそのものが消失した場合，局のフレームが滞留することになる。独立性の仮定については，到着とサービス開始時刻が独立でかつポアソン過程として解析している[9]。

本研究では，システムの入出力過程全体を“バーチャルキュー”(無限大キュー)という新しい考え方を導入して，トランザクション消滅を考慮した待ち行列系のモデル化及び定常解析を試みる[10]～[13]。

本章では、システム性能向上を目的としたシステム容量設計につながるものとして、計数過程を用いることによりシステム上に発生する待ち行列の定常分布を明らかにする。その時、消滅したトランザクションの論理的扱いとしては、出力構造を持つ独立した計数過程モデルとして定義する。さらに、定常時における分布とその解析、およびシミュレーション結果を示す。ただし、定常時におけるトランザクションとは、それぞれ独立した定常ポアソン過程と仮定することにより求められる定常分布である。

本章で定義した“ポテンシャルインプット”とは、システムに入るまでのトランザクション点列をいう。つまり、トランザクション消滅が全く発生していない状態であり、文献[14]での“ポテンシャルインプット”とは、意味が異なる。また、“アクチュアルアウトプット”とは、システム上でのトランザクション消滅が原因で、“ポテンシャルインプット”から消滅トランザクションが減算された出力トランザクション点列をいう。

2.2 確率過程について

2.2.1 計数過程について

計数過程とは、ランダム現象の起こった回数を表す連続時間型の確率過程である。 $N(t)$ を時間間隔 $[0, t)$ に起こったランダムな事象の回数とする。ただし、有限時間内には有限回の事象しか起こらないとする。このとき、 $N(t)$ は、 $0 \leq t < +\infty$ に対して、次の条件を満たす[15]。

- (1) $N(0) = 0$
- (2) $N(t)$ は非負の整数を値にとり、 t について単調増加である。
- (3) $N(t)$ は右連続である。

上記(1)～(3)の条件を満たす連続時間型の確率過程 $\{N(t)\}$ を計数過程と呼ぶ。なお、条件(3)は $N(t)$ の増加点(不連続点)での値を確定するためのものである。 $N(t)$ の標本路は、図 2.1 より、その増加点は事象が変化したことを表す。

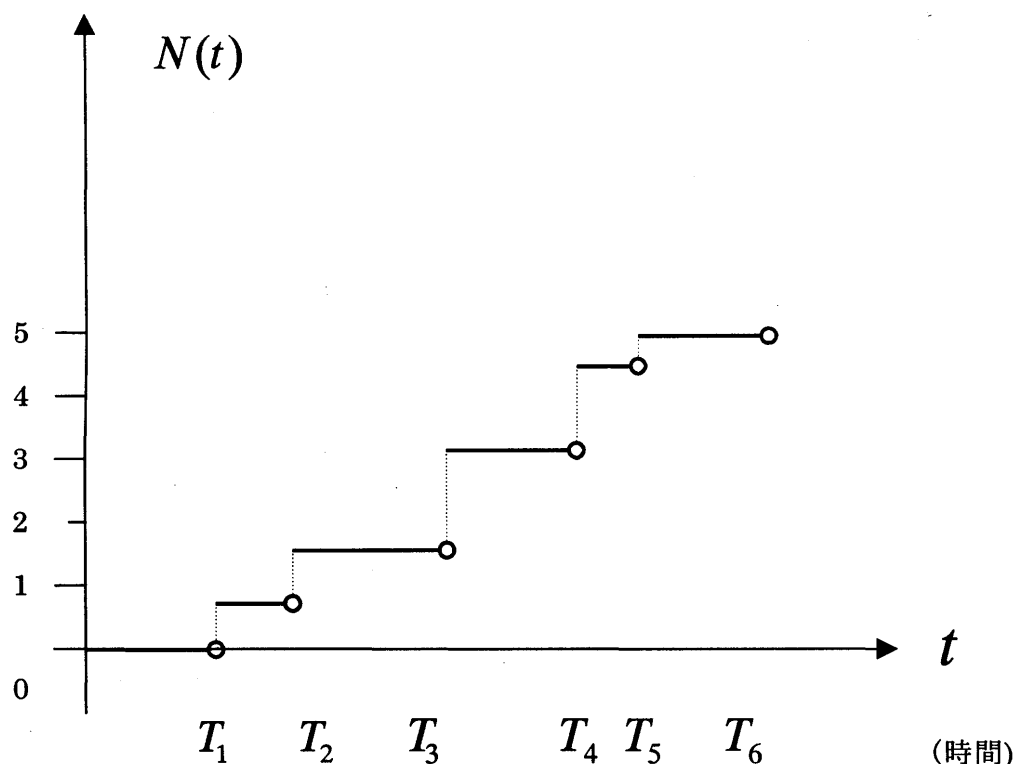


図 2.1 計数過程 $\{N(t)\}$ の標本路
Figure2.1: Sample pass of Counting Process

図 2.1 からわかるように、計数過程は $N(t)$ の増加時刻 T_1, T_2, \dots により表すこともできる。計数過程の例は、高速道路上を通過する車両台数を計量する、駅の自動改札を通過するお客様の数を計測する、製造業における検査品の数を数える等の事象がある。

つぎに、確率測度について述べる。確率測度を定めるためには、任意の n と任意の $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ に対する、 $N(u_1), N(u_2), \dots, N(u_n)$ の結合分布、またはそれと同等な

$$N(u_1), N(u_2) - N(u_1), \dots, N(u_n) - N(u_{n-1}) \quad (2.1)$$

の結合分布を与える必要がある。(2.1)式は、区間 $[0, u_1), [u_1, u_2), \dots, [u_{n-1}, u_n)$ での $N(t)$ の増分を表している。一方、 $N(t)$ の起こった事象は、時刻の列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって

定まるから、離散時間型確率過程 $\{T_n\}$ の結合分布により、 $\{N(t)\}$ の確率測度を定めることもできる。

いま、計数過程 $\{N(t)\}$ の確率モデルを $m(t) = E(N(t))$ とおくと、 $m(t)$ は平均累積個数であり、計数過程を表す量となる。 $m(t)$ が t について微分可能ならば、

$$\lambda(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{m(t+h) - m(t)}{h} \left(\equiv \frac{d}{dt} m(t) \right) \quad (2.2)$$

により、 $\lambda(t)$ を定義することができる。 $\lambda(t)$ は時刻 t での単位時間当たりの平均関数を表し、時刻 t での強度という。(2.2)式より、

$$m(t) = \int_0^t \lambda(u) du \quad (2.3)$$

である。

【定義】

計数過程 $\{N(t)\}$ は、その増分の結合分布が時刻に依存しないとき、すなわち任意の s に対して、任意の n と任意の $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ に対する、 $N(u_1 + s) - N(s)$ 、 $N(u_2 + s) - N(u_1 + s)$ 、 $N(u_n + s) - N(u_{n-1} + s)$ の結合分布が s によらないとき、定常であるという[15]。

このとき、 $\lim_{t \downarrow 0} E(N(t)) = 0$ であるから、有界収束定理より、 $\lim_{t \downarrow 0} E(N(t)) = 0$ が成り立つ。したがって、 $m(t)$ は $t = 0$ で連続である。一方、任意の $s, t \geq 0$ に対して、

$$\begin{aligned} m(s+t) &= E(N(t+s)) \\ &= E(N(t+s) - N(s)) + E(N(s)) \\ &= E(N(t)) + E(N(s)) \\ &= m(t) + m(s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

である。 $m(s+t) - m(t) = m(s) - m(0)$ であるから、任意の t で $m(t)$ は連続である。整数 k に対して、(2.4)式で、 $s = 1/k$ 、 $t = j/k$ ($j = 1, 2, \dots, k$) とすれば、帰納的に $m(1/k) = m(1)/k$ が得られる。

同様にして、整数 j, k に対して、 $m(j/k) = m(j/k)m(1)$ が成り立つ。したがって、 $m(t)$ の連続性より、 $m(t) = m(1)t$ であり、 $\lambda(t) = m'(t) = m(1)$ となる。すなわち、定常な計数過程の強度は一定である。

【定義】

計数過程が 2 つの条件

(4) (2.1)式が互いに独立な確率変数である(このとき、 $\{N(t)\}$ 独立増分を持つという)。

(5) $N(t) - N(s)$ ($0 \leq s < t$) がパラメータ $\Lambda(t) - \Lambda(s)$ のポアソン分布に従う。

を満たすとき、 $\{N(t)\}$ は、平均測度 $\{\Lambda(t)\}$ を持つポアソン過程と呼ばれる。 $\Lambda(t)$ は連続で非減少な実数値関数で、 $\Lambda(0) = 0$ とする。また、特に、 $\Lambda(t) = \lambda t$ である場合、 $\{N(t)\}$ は、強度 λ を持つ定常ポアソン過程と呼ばれる[15]。

パラメータ α のポアソン分布の平均は α であるから、 $m(t) = E(N(t)) = \Lambda(t)$ である。

したがって、 $\Lambda(t)$ が微分可能ならば、ポアソン過程の強度は、 $\lambda(t) = \frac{d}{dt} \Lambda(t)$ である。

また、 $\{N(t)\}$ が定常ポアソン過程であるならば、定義より、 $N(t+s) - N(s)$ の分布はパラメータ λt のポアソン分布で s に依存しない。したがって、条件(5)より、 $\{N(t)\}$ は定常計数過程である。

2.2.2 非定常ポアソン過程について

はじめに、 $\{N(t)\}$ は強度 $\{\lambda(t)\}$ を持つポアソン過程であるとする。このとき、次の式が成り立つ。任意の $t > 0$ に対して、

$$\lim_{h \downarrow 0} P(N(t+h) - N(t) \geq 2 | N(t+h) - N(t) \geq 1) = 0 \quad (2.5)$$

が成り立つ。(2.5)式は非定常ポアソン過程でも同時に 2 つ以上の事象が起こらないことを表している。

次に、 \mathfrak{F}_t^N を $\{N(u) | 0 \leq u \leq t\}$ によって生成された σ -集合体とする。このとき、

$\{N(t)\}$ は $\{\mathfrak{S}_t^N\}$ に適合する確率過程である。

$$M(t) = N(t) - \int_0^t \lambda(u) du \quad (2.6)$$

によって、確率過程 $\{M(t)\}$ を定義する。明らかに、 $\{M(t)\}$ は $\{\mathfrak{S}_t^N\}$ に適合している。

一方、 $0 \leq s < t$ に対して、ポアソン過程の定義の条件(4)より、

$$\begin{aligned} E(N(t) - N(s) | \mathfrak{S}_s^N) &= E(N(t - N(s))) \\ &= \int_0^t \lambda(u) du \end{aligned} \quad (2.7)$$

であるから

$$\begin{aligned} E(M(t) | \mathfrak{S}_s^N) &= E(N(t) - N(s) + N(s) | \mathfrak{S}_s^N) - \int_0^t \lambda(u) du \\ &= N(s) + \int_s^t \lambda(u) du - \int_0^t \lambda(u) du \\ &= N(s) - \int_0^s \lambda(u) du = M(s) \end{aligned} \quad (2.8)$$

である。したがって、 $\{M(t)\}$ は $\{\mathfrak{S}_t^N\}$ に適合したマルチンゲールである。

【定理(渡辺の定理)】

点過程 $\{N(t)\}$ は、すべての増加点において 1 だけ増加する。このとき、非負値関数 $\lambda(t)$ に対して、(2.6)式で定義された $\{M(t)\}$ が $\{\mathfrak{S}_t^N\}$ に適合するマルチンゲールであることは、 $\{N(t)\}$ が強度 $\{\lambda(t)\}$ を持つポアソン過程であるための必要十分条件である[15]。

$\{M(t)\}$ が $\{\mathfrak{S}_t^N\}$ に適合するマルチンゲールであることは、(2.7)式が成り立つことに等しい。(2.7)式は $\{N(t)\}$ が独立増分ならば成り立つので、定理(渡辺の定理)から、独立増分を持ち、1 点での増加量が 1 である計数過程はポアソン過程である。すなわち、

ポアソン過程とは定常性がなくても、独立増分の条件によってほとんど決まってしまう。

2.3 対象システム及び解析モデルについて

2.3.1 入出力および、消滅トランザクションの計数過程について

ある待ち行列系において、システムに到着するトランザクションは、時刻 $\{\hat{T}_q, q = 1, 2, \dots\}$ 、レート $\hat{\alpha}(t)(> 0)$ で到着するポアソン点過程、本システム中に消滅するトランザクションは、時刻 $\{C_r, r = 1, 2, \dots\}$ で消滅し、かつそのレートを $C^*(t)(> 0)$ で与えられるポアソン点過程、システムの入力トランザクションは、時刻 $\{T_q, q = 1, 2, \dots\}$ で出力し、かつそのレートが、 $\alpha(t)$ で与えられるポアソン点過程とする。

システムに入力されるトランザクションは、システム内に蓄積される。この蓄積されたトランザクションを待ち行列と呼び、時刻 $t(\geq 0)$ におけるその個数を $Q(t)$ とする。本システムの解析モデルを連続時間パラメータの確率過程としてモデル化する。 $\{\hat{A}(t); t \geq 0\}$ をポテンシャルインプットを表す計数過程(確率過程)とする時、 $\hat{A}(t)$ の計数過程は

$$\hat{A}(t) = \sum_{q=1}^{\infty} 1_{\{\hat{T}_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

で与えられるものとし、また、アクチュアルアウトプット $A(t)$ の計数過程は

$$A(t) = \sum_{q=1}^{\infty} 1_{\{T_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

と表されるものとする。消滅トランザクションの点過程は

$$\{C_r\} \in \{C_1, C_2, C_3, \dots\} = C \quad (2.11)$$

であることから、消滅トランザクションの計数過程は

$$C(t) = \sum_{r=1}^{\infty} 1_{\{C_r \leq t\}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

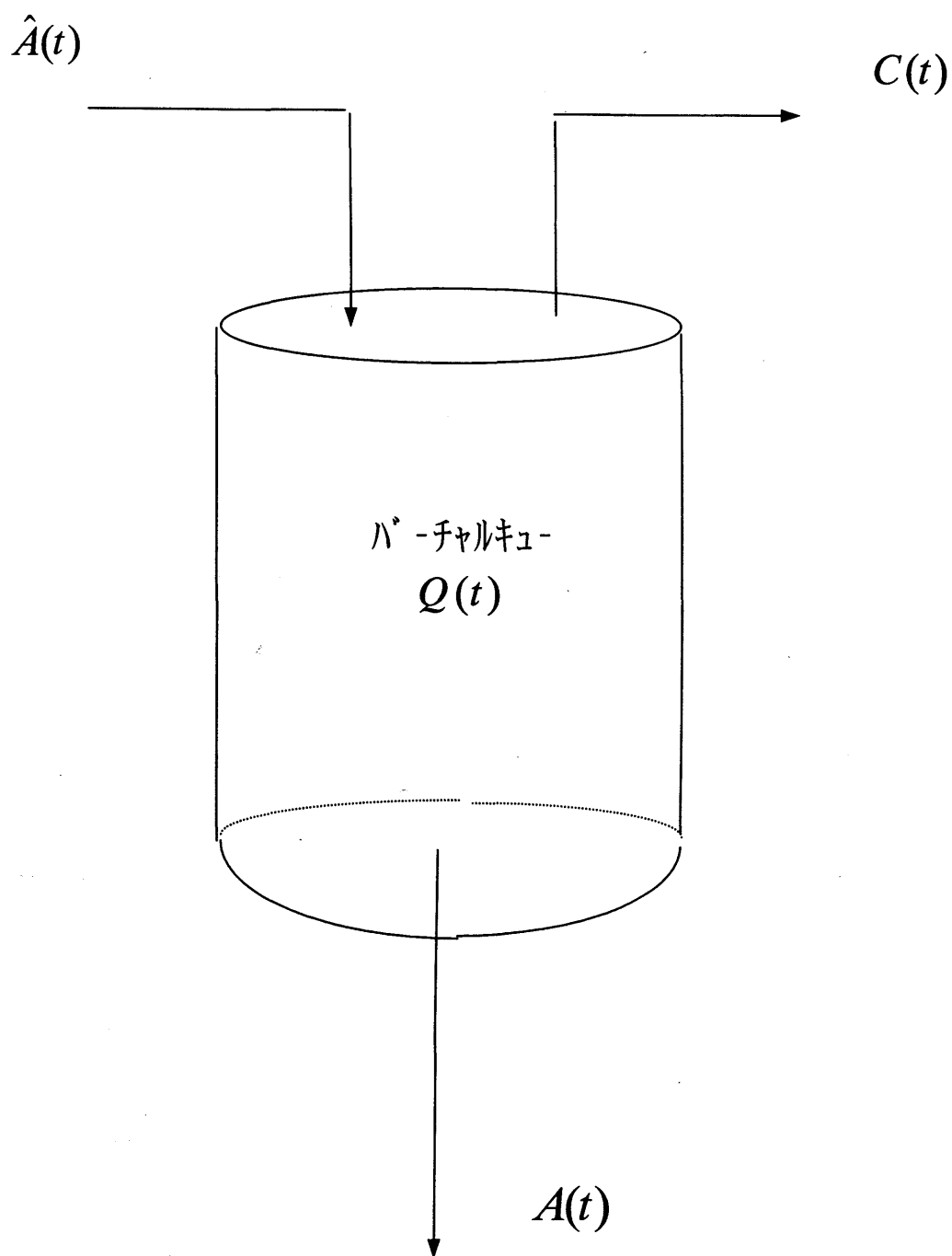


図 2.2 システム概念図

Figure2.2 System Concept

と書ける。ここで、上記指示関数 $1_{\{ \cdot \}}$ は、集合 $\{ \cdot \}$ 上で 1、それ以外では 0 の値をとる指示関数である。例えば、 $1_{\{T_q \leq t\}}$ は、時刻 $0 \leq T_q \leq t$ で $\{T_q\}$ の個数をカウントしている。

本システムのモデル式は、

$$Q(t) = Q(0) + \hat{A}(t) - C(t) - A(t) \quad (2.13)$$

である。この解析モデルでは、ポテンシャルインプット、アクチュアルアウトプットおよびトランザクション消滅をそれぞれ独立した確率過程として待ち行列を表現している。連続時間下でのトランザクション消滅をより忠実に表現出来るところに、計数過程の利点がある。

2.3.2 入出力および消滅トランザクション F_t - 強度

確率空間 (Ω, F, P) 上で一般的な考察を行う。(2.13)式に対して $F_t \subset F, t \geq 0$ を増大 σ -加法族

$$F_t = \sigma\{Q(s), \hat{A}(s), A(s), C(s); 0 \leq s \leq t\} \quad (2.14)$$

とする。消滅トランザクションをシステムから見た場合、出力構造を持った計数過程として定義しているところに特徴がある (図 2.2 参照)。

ここで、(2.13)式について F_t - 強度を定義する。 $\hat{A}(t)$ には、 F_t - 強度 $\{\hat{\alpha}(t)\}$ 、 $C(t)$ には、 F_t - 強度 $\{C^*(t)\}$ が、存在するものとする。また、任意の非負の F_t - 可予測過程 $\{X(t); t \geq 0\}$ に対して入力強度 $\{\hat{\alpha}(t)\}$ を持ち、その時の出力強度が、 $\{C^*(t)\}$ である様なシステムと考える。

$$E\left[\int_0^\infty X(s) dC(s)\right] = E\left[\int_0^\infty X(s) C^*(s) ds\right] \quad (2.15)$$

が成り立つ F_t - 可予測過程 $\{C^*(t); t \geq 0\}$ が存在する時、この $\{C^*(t)\}$ を計数過程 $\{C(t); t \geq 0\}$ の F_t - 強度と呼ぶ。よって

$$C(t) - \int_0^t C^*(s) ds \quad (2.16)$$

は F_t - 局所マルチンゲールとなる[1]。

【独立性の仮定】

任意の確率過程 $Y(t)$ に対し

$$X_t(n) = \mathbf{1}_{\{Y(t)=n\}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.17)$$

と定義する時, $Y(t)$ の確率分布を

$$P_t(n) = E[X_t(n)], \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

と表すことにする。確率過程 $\{C(t)\}$ に対し

$$\begin{aligned} E[X_t(n) \cdot C(t)] &= E[X_t(n)] \cdot E[C(t)] \\ &= P_t(n) \cdot E[C(t)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

が成立する時, $\{X_t(n)\}$, $\{C(t)\}$ は独立であるという。

以下では,

$$E[C(t)] = k_c(t), \quad t \geq 0 \quad (2.20)$$

と書くことにする。

2.4 システム定常分布

ここで, 確率過程

$$Z_t(n) = \mathbf{1}_{\{Q(t)=n\}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

と定義する。この時 $Q(t)$ の確率分布は

$$P_t(n) = E[Z_t(n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

と書ける。ここで,

$$\{Z_t(n), t \geq 0\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

は, 入出力のジャンプにより定まるから [1]

$$Z_t(n) = Z_0(n) + \int_0^t f_s ds + m_t \quad (2.24)$$

と書ける。ただし, f_t は, ある F_t -更新過程, m_t は, ある局所マルチンゲールである。かつ, 入出力過程およびトランザクション消滅過程は, マルコフ性を仮定しているので, (2.24) 式の $f_t(n)$ は具体的に書くことができ, 下記の様になる [1]。

$$\begin{aligned}
f_t(n) &= \{Z_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - Z_t(n)\}(\hat{\alpha}(t) - C^*(t)) \\
&\quad + \{Z_t(n+1) - Z_t(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\}\alpha(t) \\
n &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
Z_t(n) &= Z_0(n) + \\
&\quad \int_0^t \{Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - Z_s(n)\} \\
&\quad (\hat{\alpha}(s) - C^*(s))ds
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$+ \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\}\alpha(s)ds + m_t$$

ただし,

$$m_t(n) = M_t^{\hat{A}}(n) + M_t^A(n) \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
M_t^{\hat{A}}(n) &= \int_0^t \{Z_{s^-}(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - Z_{s^-}(n)\} \\
&\quad (d\hat{A}(s) - (\hat{\alpha}(s) - C^*(s))ds)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
M_t^A(n) &= \int_0^t \{Z_{s^-}(n+1) - Z_{s^-}(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} \\
&\quad (dA(s) - \alpha(s) \cdot \mathbf{1}_{(A(s))0})ds
\end{aligned} \tag{2.29}$$

【付録 A 参照】

ただし, (2.28), (2.29)式において s^- は, 各時点 s の直前の値であり, 各被積分項は s^- によって定まる F_t -可予測過程であり, しかも有界であることを意味している。

すなわち, 各 $\{M_t^{\hat{A}}\}, \{M_t^A\}$ は, F_t -マルチンゲールとなる[15]。

ここで, (2.26)式の右辺第 2 項および第 3 項に対して $E(\cdot)$ 演算を実行すると, 独立性の仮定[9]より

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[P_t(n)] \\
&= -(\alpha \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} + \hat{\alpha} - C^*)P_t(n) \\
&\quad + (\hat{\alpha} - C^*)P_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} \\
&\quad + \alpha \cdot P_t(n+1) \\
&\quad t \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.30}$$

が得られる【付録 B 参照】。

(2.30)式のコルモゴロフの方程式[15]に対する定常分布は,

$$P(n) = \left(\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha} \right)^n P(0) \quad (2.31)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

となり、 $P(0)$ は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \quad (2.32)$$

となる様に定めた定数である。この時の存在条件は

$$\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha} < 1 \quad (2.33)$$

である。すなわち、(2.33)式は(2.31)式の定常分布が唯一存在するための条件である。

$C^* = 0$ の時は、トランザクション消滅が発生しない場合である。これは、通常の $M/M/1$ 型の待ち行列系である。

$C^* = \hat{\alpha}$ の時は、トランザクションがすべて消滅している状態である。

$C^* < \hat{\alpha}$ の時は、入出力およびトランザクション消滅を、それぞれ独立した確率過程とした構造が、マルコフ過程における $M/M/1$ 型の待ち行列の法則に従うことを示している。

2.5 システム定常解析

システムから見た場合、トランザクション消滅を”消費過程”と認識できる。そこで、入出力過程を次の様に考える。トランザクション消滅が発生するまでの過程を消費過程とし、この時点で処理するトランザクションの待ち行列を $Q_1(t)$ 、トランザクション消滅が発生した後の過程を後過程とし、この時点で処理するトランザクションの待ち行列を $Q_2(t)$ の二つに分けて考える。ただし、消費過程には、流通過程を含む。流通過程とは、 $Q_1(t)$ から出力されたトランザクションがそのまま後過程への入力となる。

トランザクション消滅に要する時間が、本システムにどのような影響度を持っているかについて解析を試みる。入力から出力までに要する時間をシステム処理時間と考

え，定常時での平均処理時間をリトルの公式[9],[16],[17]を用いて求める。

(2.13)式は，図 2.3 より下記の式の様に二つのキューの分けて考察する。

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_1(t) + Q_2(t) \\ &= \hat{A}(t) - C(t) - A(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

流通過程 $D(t)$ の F_t - 強度を $\beta(t)$ とすると

$$\beta(t) \equiv k(\hat{\alpha}(t) - C^*(t)) \quad (2.35)$$

ただし， $0 \leq k \leq 1$ である。

ここで， $D(t)$ は，流通過程で，

$$Q_1(t) = Q_1(0) + (\hat{A}(t) - C(t)) - D(t) \quad (2.36)$$

$$Q_2(t) = Q_2(0) + D(t) - A(t) \quad (2.37)$$

$$Q(0) = Q_1(0) + Q_2(0) \quad (2.38)$$

となる．すなわち， $Q_1(t), Q_2(t)$ の定常分布は，同型の幾何分布となり，このシステムにおけるトランザクションの平均処理時間は

$$W_R \equiv W_{R1} + W_{R2} \quad (2.39)$$

と定義できる．いま，リトルの公式[9],[16],[17]によれば，

$$W_{R1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_1(n)}{\hat{\alpha}} \quad (2.40)$$

$$W_{R2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_2(n)}{\beta} \quad (2.41)$$

ただし， β は流通過程の出力過程における F_t - 強度 $\beta(t)$ の期待値である．また， $P_1(n), P_2(n)$ はそれぞれ $Q_1(t), Q_2(t)$ の定常分布である．ここで $P_1(n), P_2(n)$ に関して分布そのものは，同一形態の分布を示すが，ここでは，以下の様に仮定する。

$$P_1(n) \approx P_2(n) \quad (2.42)$$

よって，システム処理時間 W_R は，

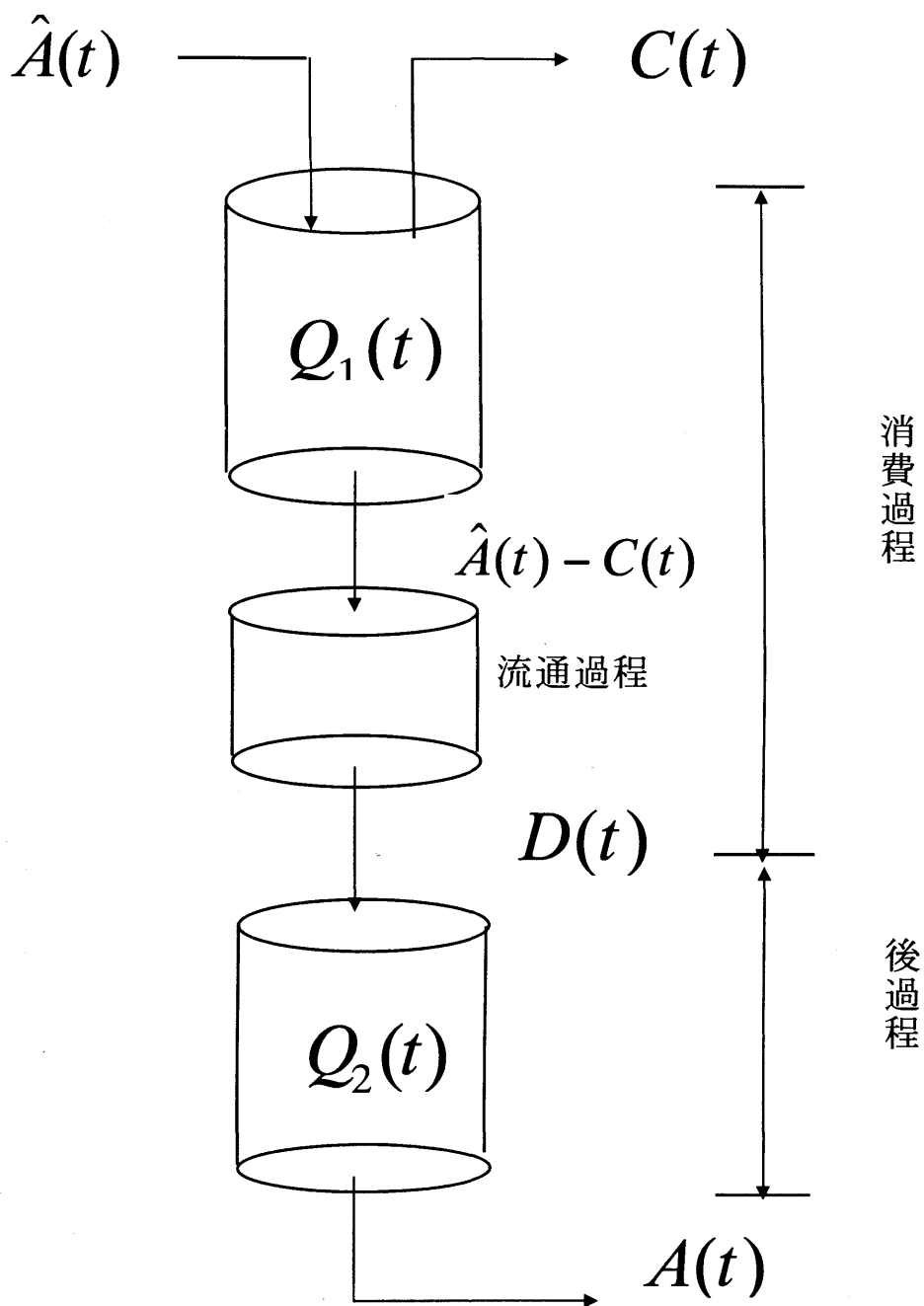


圖 2.3 入出力過程

Figure2.3 Input / Output Process

$$\begin{aligned}
W_R &= \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{1}{\beta} \right) \sum_{n=0}^{\infty} n P_1(n) \\
&= \left(\frac{1}{\hat{\alpha}} + \frac{1}{k(\hat{\alpha} - C^*)} \right) \sum_{n=0}^{\infty} n P_1(n) \\
&< \left(1 + \frac{1}{k} \right) W_{R1} = L \cdot W_{R1}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

ここで、 $L(>2)$ はシステム処理時間に対する流通係数と呼ばれる定数である。

$$P_1(n) = \left(1 - \frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha} \right) \left(\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha} \right)^n, n > 0 \tag{2.44}$$

と書ける。

$$\sum_{n=0}^{\infty} n P_1(n) = \frac{\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha}}{1 - \frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha - (\hat{\alpha} - C^*)} \tag{2.45}$$

が得られる。それゆえ、(2.45)式より(2.46)式を用いれば、 W_{R1} は

$$W_{R1} = \frac{(\hat{\alpha} - C^*)}{\hat{\alpha} \{ \alpha - (\hat{\alpha} - C^*) \}} \tag{2.46}$$

となる。すなわち、(2.43)式、(2.46)式によりシステム処理時間 W_R が求められる。

2.6 シミュレーション結果およびその考察

(2.43)式で示した不等式は、本システムに与える影響は W_{R1} によるところが大きいことを示す。この近似式の妥当性について検証する。図 2.4～図 2.6 はシミュレーション開始後しばらく計算値とかい離があるのは、元々、計算値ではシステム上のバッチキュー $Q(t)$ が存在しているためである。シミュレーション開始時では、消費過程の $Q_1(t)$ と後過程の $Q_2(t)$ は、いずれも Q_1, Q_2 の待ち行列数がいずれも存在しない状態で始めていることに起因する。言い替えれば、過渡状態である。

図 2.4～図 2.6 においてシステム処理時間は、この W_{R1} に大きく依存していると考えられる。かつ、流通係数 L は、図 2.7 で示す様にトランザクション消滅のレート

C^* をある程度変化させても、ほぼ一定の値を示していることが分かる。つまり、(2.43)式での流通係数 L を用いて近似を行ったことが、定常時には、妥当性がある。シミュレーション条件は、下記の通りです。

- トランザクション生成

トランザクション長：100 バイト(固定)

発生分布：指数分布(分布のパラメータとして平均値を与える($\hat{\alpha}$))

- トランザクションの処理時間(正常処理分)

処理時間：処理速度から算出($\alpha = 40(pk / sec)$ として一定)

- トランザクション消滅

C^* は、 C^* と α の比率により算出($C^* / (C^* + \alpha)$)した。ただし、 C^* は定数パラメータとした。

- シミュレーション時間

20000 秒

- 平均処理時間

上記シミュレーション時間中に、処理対象となった各トランザクションの処理処理時間の平均値(秒)

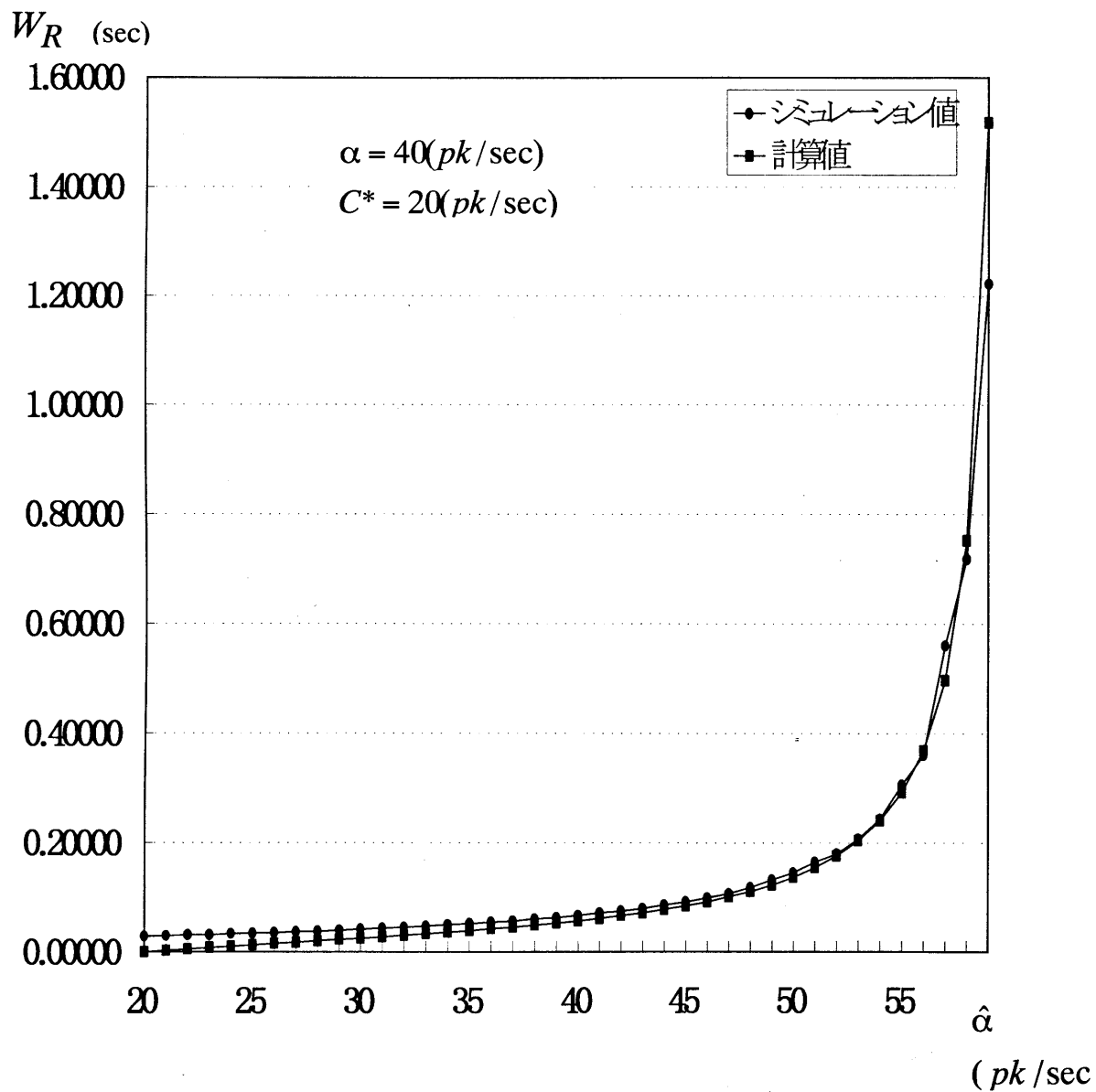


図 2.4 平均処理時間に関するシミュレーション
 および数値計算結果

Figure2.4 The comparison between simulation results and
 calculation ($C^* = 20pk/sec$) results for the transit
 time-lag in stationary

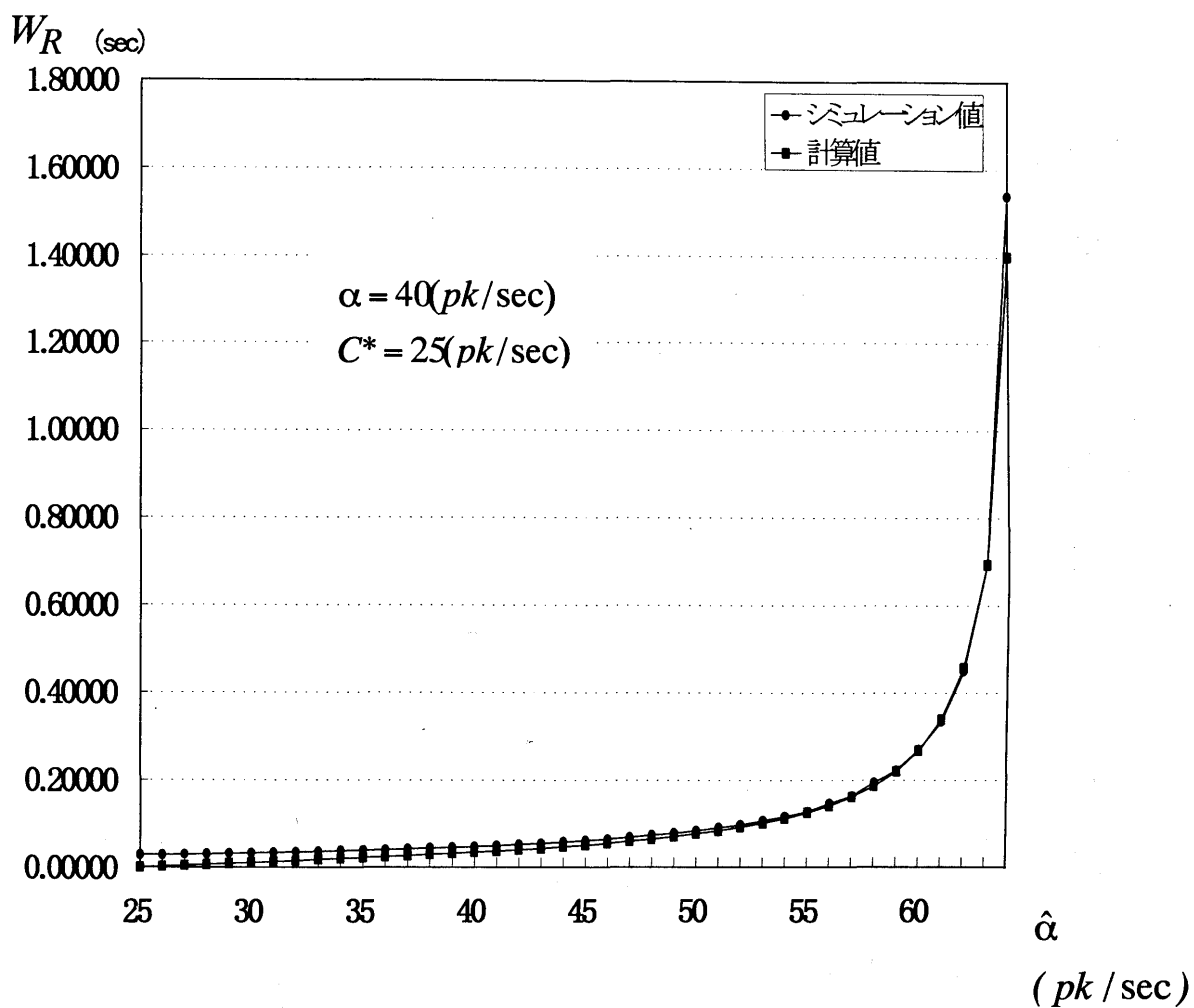


図 2.5 平均処理時間に関するシミュレーション
 および数値計算結果

Figure2.5 The comparison between simulation results and
 calculation($C^* = 25pk/sec$) results for the transit time-
 lag in stationary

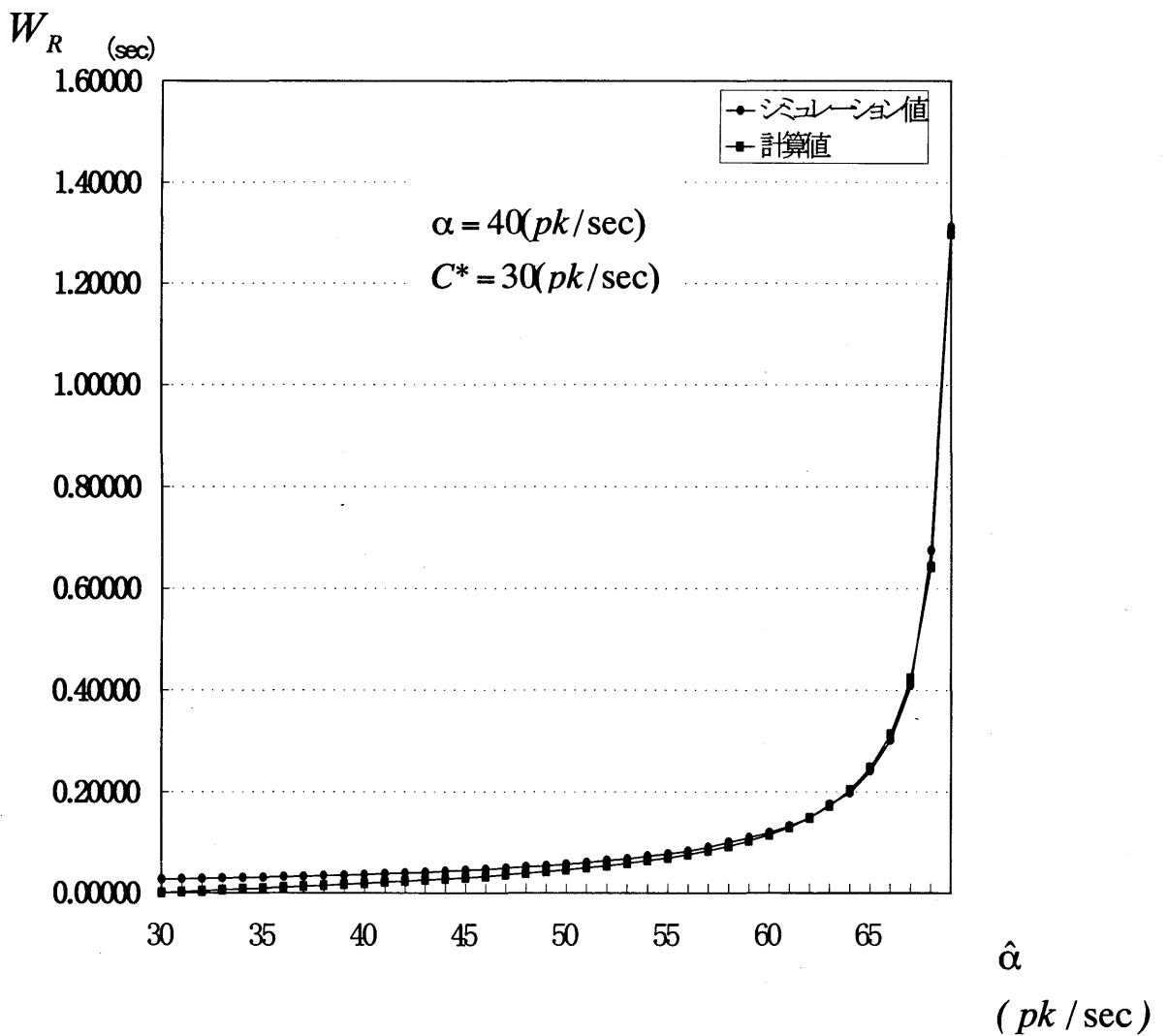


図 2.6 平均処理時間に関するシミュレーション
 および数値計算結果

Figure2.6 The comparison between simulation results and
 calculation($C^* = 30pk/sec$) results for the transit
 time-lag in stationary

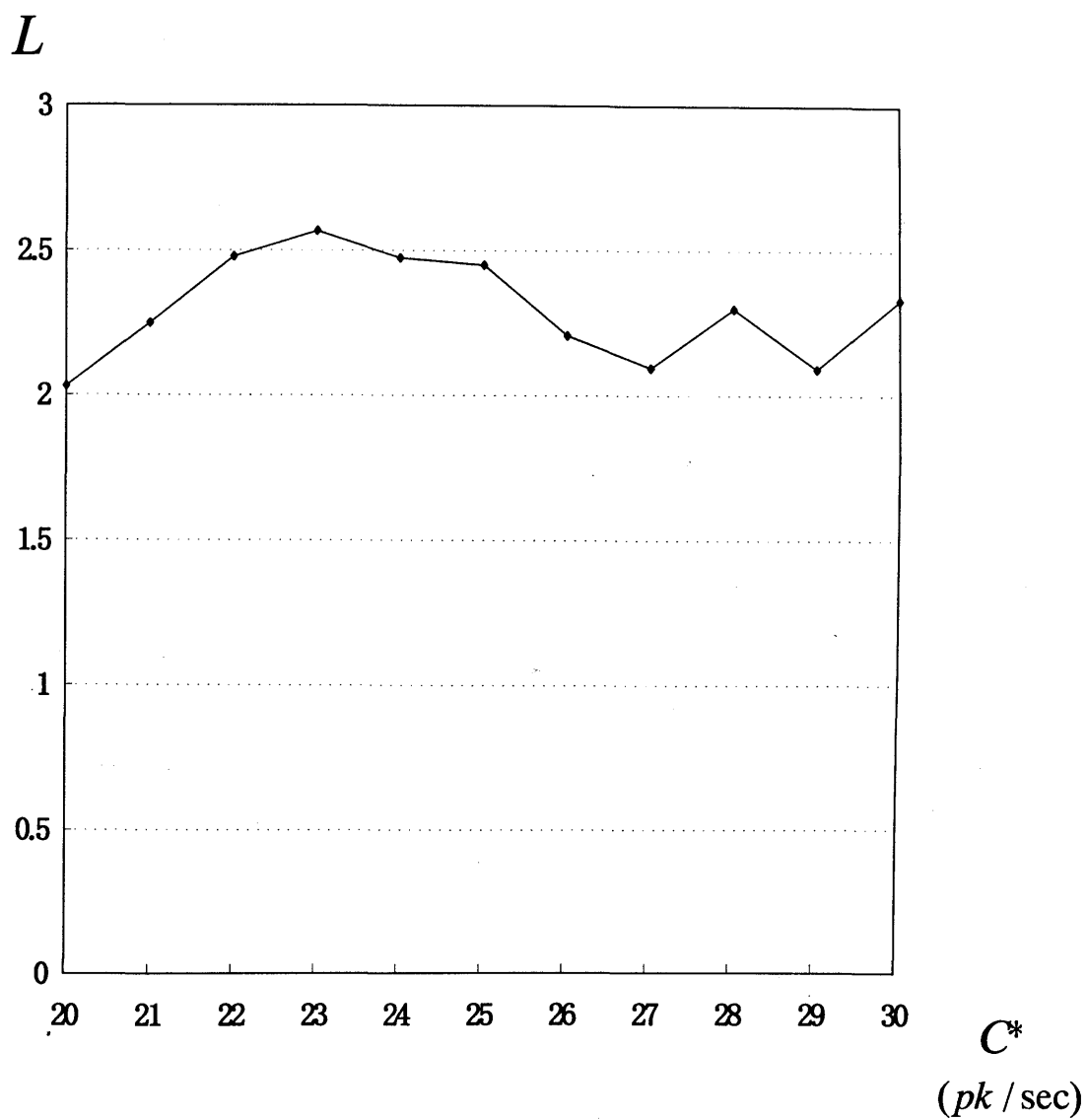


図 2.7 トランザクション消滅(C^*)とパラメータ(L)との関係

Figure2.7 The relationship between the transaction lost(C^*) and parameter(L)

2.7 まとめ

本章は，入出力およびトランザクション消滅を独立した確率過程として定義し，点過程を活用することにより，システムモデル式を提案した。ここでは，入出力過程及びトランザクション消滅過程を各々独立したポアソン過程であると仮定した上で，システムの定常確率分布(幾何分布)を求め，その唯一存在条件も併せて求めた。

さらに，この定常分布を利用することにより，入力されたトランザクションの定常処理時間(システム処理時間)をリトルの公式を応用して求めた。

以上，本システムに与える要因は，トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響することがシミュレーションで確認された。よって，本研究の方法は，トランザクション消滅が存在するようなシステムに対し，システム容量設計のための有力な手法になると考える。

参考文献

- [1] P. BRÉMAUD “Point process and queues martingale dynamics”, pp87, p117, pp. 123-127, Springer-Verlag, New York Inc. 1981
- [2] G.P KLIMOV, “Time Sharing Service Systems I”, Theory of Probability and It's Appl. 19 pp. 532-551, 1974
- [3] J.G SHANTHIKUMAR and D.D YAO, “Stochastic monotonicity of the queue lenghs in closed queuing networks”, Operations Research 35 pp. 583-588, 1987
- [4] F. BACCELLI, P. BOYER, and G. HEBUTERNE, “A single-server queue with impatient customers”, Advances in Applied Probability, vol. 16, pp. 887-905, 1984.
- [5] R. RISHEL, “Dynamic programming and minimum principles for systems with jump Markov disturbances”, SIAM J. Contr., vol. 13, pp. 338-371, Feb. 1975.
- [6] ADRIAN SEGALL, THORMAS KAILATH, “The Modeling of Randomly Modulated Jump Process”, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-21, No.2 pp. 135-143, March 1975
- [7] P. BRÉMAUD, “Optimal Thinning of a Point Process”, SIAM J, CONTROL AND OPTIMIZATION vol. 17, No. 2, March pp. 223-230, 1979
- [8] D.W TCHA and S.R PLISKA, “Optimal control of single-server queuing networks and multi-class M/G/1 queues with feedback”, Operations Research 25 pp. 248-258, 1977
- [9] 箕輪弘之：「トークンリング型ネットワークのジャンプタイプ確率微分方程式を用いたモデル化」 電子情報通信学会誌, B-1, vol. J78-B-1, No. 7, pp. 272-278, 1995 年 7 月
- [10] 白井・天野・井上：「衝突を考慮した C/S 型ネットワークのジャンプ型確率微分方程式を用いたモデル化」 電気関係学会関西支部連合大会, 1996 年 11 月
- [11] K. SHIRAI, Y. AMANO and K. INOUE “Stochastic modeling and stationary distributions for the C/S type network with collision by using jump process”,

Memories of Institute of Science and Engineering Ritsumeikan University,
Shiga, Japan, No. 55, 1996

- [12] 白井・天野・井上:「フレーム衝突を含む一般化 C/S 型ネットワークのモデル化および定常分布」 信学春季全大, 1997 年 3 月
- [13] 白井・天野・井上:「トランザクション消滅のあるシステムの定常解析」 電気学会論文誌, vol. 118-C, 1998 年 10 月
- [14] LODI LI "A stochastic theory of the Firm", Mathematics of operations research, vol. 13, No. 3, August, 1988
- [15] 宮沢政清:「確率と確率過程」 p90, p168, 近代科学社(1993)
- [16] 川島幸之助・町原文明・高橋敬隆・斎藤 洋:「通信トラフィック理論の基礎とマルチメディア通信網」 p97, (社)電子情報通信学会, 1995 年 11 月
- [17] WALTER A. ROSENKRANTZ "Little's theorem: A stochastic integral approach", Queuing System 12, pp. 319-324, 1992

第 3 章

有限個のトランザクション消滅を考慮した 待ち行列系の定常解析

—トランザクション消滅過程の定常系内処理時間について—

3.1 まえがき

第 1 章で述べたように、トランザクション消滅とは、入力されたトランザクションが期待される出力の以前に、系外に出力されるトランザクションの事をいう。第 2 章では、トランザクション消滅が、システム全体にどのように影響されるかを解析し、トランザクション消滅が、システム性能全体に大きな影響を与える事を示した。

近年、確率過程における点過程、計数過程を用いた研究には、待ち行列システムに対するモデル化、これをもとにした解析がなされている。さらに、最適制御問題に対して、現代制御理論を用いて最適制御解を求めている[1]～[8]。特に、マルチンゲール理論を待ち行列系に適用した事は、定常状態におけるシステム解析の分野に貢献をもたらした。

待ち行列系のモデル化に関しては、P. BRÉMAUD は、確率過程における点過程、計数を用いて待ち行列系のモデル化を行っている。さらに、最適制御問題に対して、入出力レートを制御する事により、ある評価関数のもとに制御理論における動的計画法を適用する事により最適解を求めている[1]。

一方、箕輪は、トークンリング型ネットワークに対してモデル化を提案している。モデル化の手法としては、データの入力と出力は点過程、計数過程を用い、トークンそのもののモデル化にジャンプ型確率微分方程式を導入している。到着とサービス開始時刻が独立でかつポアソン過程として解析されている。トークンリング型ネットワークに対して、点過程、計数過程を用いてモデル化した報告である[9]。

本研究では、第 2 章と同様に、システムの入出力過程全体を“バーチャルキュー”(無限大キュー)という新しい考え方を導入して、トランザクション消滅を考慮した待

ち行列系のモデル化及び定常解析を試みている[10]～[13]。

第 2 章との大きな違いは、トランザクション消滅が、第 2 章では無限個存在出来るのに対し、この章では有限個という制限を付加した点にある。トランザクション消滅を、有限個に制限することによりシステムモデル式も第 2 章とは異なる。ここでは、新たにジャンプ型確率微分方程式を導入する[14]。

システムモデルの定式化、定常時における分布とその解析、併せてシミュレーション結果を示す。ただし、定常時におけるトランザクションは、それぞれ独立した定常ポアソン過程と仮定し、システムの定常分布を求めた。

最後に、有限個のトランザクション消滅のある待ち行列系に対して、厳密な平均処理時間を求め、シミュレーション結果と数値計算結果との比較により上述の解の検証を行う。

3.2 対象システム及び解析モデルについて

3.2.1 入出力および、消滅トランザクションの計数過程について

図 3.1 において、システムに到着するトランザクションの到着時点列は、 $\{\hat{T}_q, q = 1, 2, \dots\}$ である。また、本システム中に消滅するトランザクションの有限消滅時点列は、 $\{C_r, r = 1, 2, \dots, k\}$ であるとする。システムからの出力トランザクション時点列は、 $\{T_q, q = 1, 2, \dots\}$ で出力される。ここで、システムに入力されるトランザクションは、システム内に蓄積されるものとする。この蓄積されたトランザクションを待ち行列と呼び、時刻 $t (\geq 0)$ におけるその個数を $Q(t)$ とする。いま、 $Q(t)$ を消費過程 $Q_1(t)$ と後過程 $Q_2(t)$ の二つに分けて考える事にする。この時、図 3.1 での流通過程とは、消費過程と後過程を接続する等価的な過程である。流通過程には、遅延時間が発生しない。消費過程とは、 k 個のトランザクション消滅が発生する過程を考慮した $M/M/1$ 型の待ち行列である。

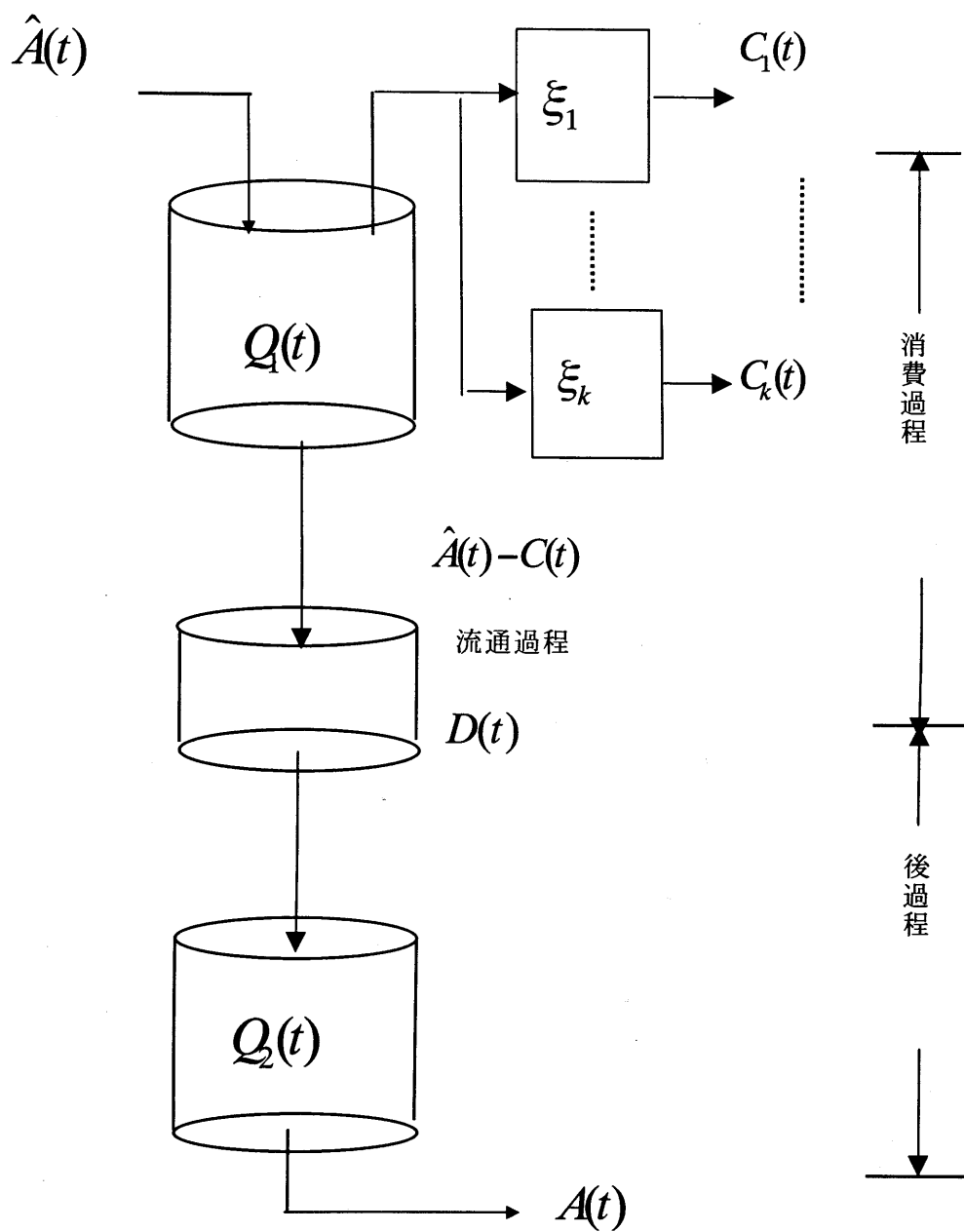


圖 3.1 入出力過程

Figure.3.1 Input/ Output Process

$$\hat{A}(t) = \sum_{q=1} \mathbf{1}_{\{\hat{T}_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

また、アクチュアルアウトプット $A(t)$ の計数過程は

$$A(t) = \sum_{q=1} \mathbf{1}_{\{T_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

と表される。消滅トランザクションの点過程は

$$\{C_r\} \in \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\} = C \quad (3.3)$$

と表すことにする。

消滅トランザクションの計数過程は、 k 個の互いに独立したポアソン分布に従う定常過程の和であり、 $\{\hat{A}(t)\}$ とともに独立である。 $C(t)$ の定義を

$$C(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{\{Q_i(s^-) \geq i\}} dC_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.4)$$

と表す。 $C(t)$ は、 k 個におけるトランザクション消滅を表す定義式である。この式の意味は、消費過程の待ち行列数 $Q_i(t^-)$ が、現在時刻 t の直前の時刻 t^- で存在していればその待ち行列数の総和をカウントしているということである。さらに、これらは送出遅延時間 $\{\xi_i(t), i = 1, 2, \dots, k, t \geq 0\}$ を経て、系内トランザクションを系外へ送出するためのものとする。また、(3.4) 式で定義される消滅トランザクションは、システムから見た場合、出力構造を持った計数過程として定義する(図 3.1 参照)。 $\{C_i(t), i = 1, 2, \dots, k\}$ は、トランザクション消滅が i 個における計数過程を表す。次式のようになる。

$$C_i(t) = \sum_{r=1} \mathbf{1}_{\{C_r \leq t\}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

また、上述の前提より、その平均は定常性より時間 t に比例するが、ここでは

$$E[C_i(t)] = \bar{C} \cdot t, \quad t \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \quad (3.6)$$

が成立するものとする。但し、 $E[\cdot]$ は期待値演算を表している。 \bar{C} は、トランザクション消滅の平均値を表す。ここで、上記指示関数 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ は、集合 $\{\cdot\}$ 上で 1、それ以外では 0 の値をとる指示関数である。

本システムのモデル式を、

$$Q(t) = Q(0) + \hat{A}(t) - \sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{(Q(s^-) \geq i)} dC_i(s) - A(t) \quad (3.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

と表す。図 3.1 に従いシステムを

$$Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t) \quad (3.8)$$

と表す。この時、 $Q_1(t)$ 、 $Q_2(t)$ は各々

$$Q_1(t) = Q_1(0) + \hat{A}(t) - \sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{(Q_1(s^-) \geq i)} dC_i(s) - D(t) \quad (3.9)$$

$$Q_2(t) = Q_2(0) + D(t) - A(t) \quad (3.10)$$

$$Q(0) = Q_1(0) + Q_2(0) \quad (3.11)$$

で表される等価なシステムのモデル式である。但し、(3.9)、(3.10)式の $\{D(t)\}$ は、流通過程[10]を表しており、 $\{\hat{A}(t) - C(t)\}$ と等価であるものとする。(3.8)～(3.11)式で表現される系は、(3.7)式の等価系と考える事が出来る[10]。

このモデルは、ポテンシャルインプット、アクチュアルアウトプットおよびトランザクション消滅をそれぞれ独立した確率過程として表す事により、待ち行列を表現している。これにより、連続時間下でのトランザクション消滅を考慮した待ち行列系が忠実に表現出来た事になる。

3.2.2 入出力および消滅トランザクションのレート

各々のトランザクションのレートについて確率空間 (Ω, F, P) 上で一般的な考察を行う。(3.7)式に対して $F_t \subset F, t \geq 0$ 、増大 σ -加法族を

$$F_t = \sigma\{Q(s), \hat{A}(s), A(s), C(s); 0 \leq s \leq t\} \quad (3.12)$$

と定義する。

(3.7)式で記述されているモデル式で、入出力およびトランザクション消滅を表している計数過程のレートを定義する。 $\{\hat{A}(t), t \geq 0\}$ はレート $\hat{\alpha}(t)$ のポアソン過程、 $\{D(t), t \geq 0\}$ は $\{\hat{A}(t) - C(t)\}$ と等価なポアソン過程であり、そのレートは

$(\hat{\alpha}(t) - C^*(t))$ とする。ただし, $\{\hat{A}(t), t \geq 0\}$, $\{A(t), t \geq 0\}$, $\{C(t), t \geq 0\}$ には, それぞれレート $\{\hat{\alpha}(t)\}$, $\{\alpha(t)\}$, $\{C^*(t)\}$ が存在するものとする。

入出力およびトランザクション消滅を表している計数過程のレート $\{\hat{\alpha}(t)\}$, $\{\alpha(t)\}$, $\{C^*(t)\}$ は, 任意の非負の可予測過程 $X(t)$ に対して

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\infty X(s)d\hat{A}(s)\right] &= E\left[\int_0^\infty X(s)\hat{\alpha}(s)ds\right] \\ E\left[\int_0^\infty X(s)dA(s)\right] &= E\left[\int_0^\infty X(s)\alpha(s)ds\right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$E\left[\int_0^\infty X(s)dC_i(s)\right] = E\left[\int_0^\infty X(s)C^*(s)ds\right]$$

が, $\{\hat{A}(t), t \geq 0\}$, $\{A(t), t \geq 0\}$, $\{C^*(t); t \geq 0\}$ に対して成立する。

【独立性の仮定】:

任意の確率過程 $Y(t)$ を

$$X_t(n) = \mathbf{1}_{\{Y(t)=n\}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

と定義する時, $Y(t)$ の確率分布を

$$P_t(n) = E[X_t(n)], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

と表せば

$$\begin{aligned} E[X_t(n) \cdot C_i(t)] &= E[X_t(n)] \cdot E[C_i(t)] \\ &= P_t(n) \cdot E[C_i(t)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

が成立する時, $\{X_t\}$, $\{C_i(t)\}$ は独立であるという。同様に, $\{\hat{A}(t)\}, \{A(t)\}$ も $\{X_t(n)\}$ とは独立である。

3.2.3 システム定常分布

確率過程

$$Z_t(n) = \mathbf{1}_{\{Q(t)=n\}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

を定義する。 $Q(t)$ の確率分布は

$$P_t(n) = E[Z_t(n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

と書ける。ここで、

$$\{Z_t(n), t \geq 0\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

は、入出力のジャンプにより定まるから [1] 【付録 C 参照】

$$Z_t(n) = Z_0(n) + \int_0^t f_s ds + m_t \quad (3.20)$$

は、計数過程である。ただし、 f_t は F_t - 更新過程、 m_t は、局所マルチンゲールである。入出力過程およびトランザクション消滅過程は、マルコフ性を仮定している⁽¹⁾。よって、 f_t 、 m_t は下記の様になる [1]。

$$\begin{aligned} f_t(n) = & \{Z_t(n-1) \mathbf{1}_{(n)0} - Z_t(n)\} \hat{\alpha}(t) \\ & - \sum_{i=1}^k \{Z_t(n-1) - Z_t(n)\} \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(t) \\ & + \{Z_t(n+1) - Z_t(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} \alpha(t) \\ & n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} Z_t(n) = & Z_0(n) + \\ & \int_0^t \{Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - Z_s(n)\} \hat{\alpha}(s) ds \\ & - \sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(s) ds \\ & \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} \alpha(s) ds + m(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

ただし、

$$m_t(n) = M_t^{\hat{A}}(n) + M_t^A(n) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} M_t^{\hat{A}}(n) = & \int_0^t \{Z_{s^-}(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - Z_{s^-}(n)\} \\ & (d\hat{A}(s) - \hat{\alpha}(s) ds) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_{s^-}(n-1) - Z_{s^-}(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} \\ & (dC_i(s) - C^*(s) ds) \end{aligned}$$

$$M_t^A(n) = \int_0^t \{Z_{s^-}(n+1) - Z_{s^-}(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} (dA(s) - \alpha(s) \cdot \mathbf{1}_{\{A(s)=0\}}) ds \quad (3.25)$$

但し、(3.24)、(3.25)式において s^- は、各時点 s の直前の値であり、各被積分項は s^- によって定まる F_t -可予測過程であり、しかも有界である事を意味している。即ち、各 $\{M_t^A\}, \{M_t^A\}$ は、 F_t -マルチンゲールとなる[4]。

(3.22)式の右辺第2項および第3項に対して $E(\cdot)$ 演算を実行すると、独立性の仮定[3]より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[P_t(n)] &= -[\alpha \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} + \{\hat{\alpha} - C^* \inf(n, k)\} P_t(n) + \\ &\quad [\hat{\alpha} - C^* \inf(n, k)] P_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}] \\ &\quad + \alpha \cdot P_t(n+1) \quad t \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

が得られる【付録D参照】。

ここで、(3.26)式のコロモゴロフの方程式に対する定常分布は、

$$P(n) = \left[\frac{1}{\alpha} \right] \cdot \prod_{j=1}^n [\hat{\alpha} - C^* \inf(j, k)] P(0) \quad (3.27)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n, k \leq n$$

となる。ここで、 $P(0)$ は

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \quad (3.28)$$

となる様に定めた定数である。

以上のように、トランザクション消滅過程は、遅延に要する処理を必要とし、有限個の互いに独立した定常ポアソン過程として拘束した場合、(3.27)式に示す定常分布を求めた。

第2章におけるトランザクション消滅を考慮したモデル式に対して、本章では、その消滅を有限個で近似した場合の近似式を与えており、 $k > 1$ の場合は、この近似式を用いる方がトランザクション消滅数の制限に関する情報を正確に表現している。

3.2.4 定常時における平均処理時間

トランザクション消滅をシステムから見た場合，“消費過程”と認識する[10]。ここでは、 k 個のトランザクション消滅数の場合について平均処理時間を求めることにする。

そこで、入出力過程を次の様に考える。バーチャルキューをトランザクション消滅が発生するまでの過程を消費過程とし、この時点で滞留するトランザクションのキューを $Q_1(t)$ 、トランザクション消滅が発生した後の過程を後過程とし、この時点で滞留するトランザクションのキューを $Q_2(t)$ の二つに分けて考える事にする。

入力から出力までに要する時間をシステム処理時間と考える。システムにおけるトランザクション処理時間を次式の様に表す。

$$W_F(t) = W_R(t) + S_R(t) \quad (3.29)$$

ただし、

$W_F(t)$: 系内トランザクション処理時間

$W_R(t)$: 待ちトランザクション処理時間

$S_R(t)$: 消滅トランザクションの系外送出時間

である。図 3.1 より、このシステムにおけるトランザクションの平均処理時間は

$$W_R = W_{R1} + W_{R2} \quad (3.30)$$

と定義できる。今、リトルの公式[15][16]によれば、

$$W_{R1} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_1(n)}{\hat{\alpha}} \quad (3.31)$$

$$W_{R2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_2(n)}{\alpha} \quad (3.32)$$

$P_1(n), P_2(n)$ は、それぞれ消滅過程、後過程の定常分布である。ここで、 $P_1(n), P_2(n)$ に関して

$$P_1(n) \approx P_2(n) \quad (3.33)$$

を仮定する。よって、システム処理時間 W_R は、第2章の解析より

$$W_R \approx L \cdot W_{R2} \quad (3.34)$$

と表すことができる。

ここで、 $L(>2)$ はシステム処理時間に対する流通係数と呼ぶ。

(3.29)式右辺第2項を次の様に定義する。

$$S_R(t) = \sum_{i=1}^k \xi_i(t) \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq 0\}} \quad (3.35)$$

$\{\xi_i(t), i=1,2,\dots,k\}$ は、 k 個の消滅トランザクション処理時間を表している。系外送
出時間 $\{\xi_i(t), i=1,2,\dots,k\}$ と待ち行列数 $\{Q_1(t)\}$ とは独立であると仮定する。この仮定
は、製造業において、不良品の処理は入荷量とは独立に処理されるものと考えたと妥
当性のあるものである。

この仮定と定義のもとで(3.35)式の両辺に期待値演算を実行すると

$$\begin{aligned} E[S_R(t)] &= E\left[\sum_{i=1}^k \xi_i(t) \mathbf{1}_{\{Q_1(s^-) \geq 0\}}\right] \\ &= S(i) \cdot E[\mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq 0\}}] \\ &= S(i) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \inf(k, n) P(n) \end{aligned} \quad (3.36)$$

と書ける。

(3.29), (3.34), (3.36)式より、本システムの平均トランザクション処理時間は

$$W_F(t) = L \cdot W_{R2} + S(i) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \inf(k, n) P(n), i=1,2,\dots,k \quad (3.37)$$

と表される。ただし、(3.36), (3.37)式において

$$E[\xi_i(t)] = S(i), i=1,2,\dots,k \quad (3.38)$$

と置いた。

(3.7)式の両辺の平均をとると

$$\begin{aligned} E[\hat{A}(t) - A(t)] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^k \int_0^t \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} dC_i(s)\right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

となる。(3.39)式は、両辺共に独立した定常ポアソン過程であるので、(3.6)式を用いれば

$$[\hat{\alpha} - \alpha] \cdot t = \bar{C} \cdot t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \inf(k, n) P(n) \quad (3.40)$$

と変形出来る。

(3.40)式より、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \inf(k, n) P(n) = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\bar{C}} \quad (3.41)$$

となる。

(3.37), (3.41)式より

$$W_F = L \cdot W_{R2} + \left(\frac{S(i)}{\bar{C}} \right) \cdot (\hat{\alpha} - \alpha) \quad (3.42)$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

が得られる。ただし、等価系の考えによれば

$$W_{R2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n P_2(n)}{\hat{\alpha} - C^*} \quad (3.43)$$

である。(P₁(n) ≈ P₂(n) の仮定より)

この等価系の考え方にに基づき、(3.27)式を形式的に

$$\begin{aligned} P(n) &= \left[\frac{1}{\alpha} \right]^n \cdot \prod_{j=1}^n [\hat{\alpha} - C^*] P(0) \\ &\equiv \left[\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha} \right]^n \cdot P(0), \\ n &> 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

と変形する。ただし、 $\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha} < 1$ である。

それゆえ、(3.44)式より $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$ となる様に P(0) を定めると(3.44)式は

$$P(n) = \left[1 - \frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha}\right] \cdot \left[\frac{\hat{\alpha} - C^*}{\alpha}\right]^n \quad (3.45)$$

$$n > 0$$

と書ける。(3.45)式を用いると(3.43)式より W_{R2} は

$$W_{R2} = \frac{(\hat{\alpha} - C^*)}{\hat{\alpha}\{\alpha - (\hat{\alpha} - C^*)\}} \quad (3.46)$$

と求まる。

(3.42), (3.46)式より, 系内トランザクション平均処理時間は

$$W_F = L \cdot \frac{\{\hat{\alpha} - C^*\}}{\hat{\alpha}\{\alpha - \{\hat{\alpha} - C^*\}\}} + \left[\frac{S(i)}{\bar{C}}\right] \cdot (\hat{\alpha} - \alpha) \quad (3.47)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, k \leq n, n > 0$$

と表される。

(3.47)式を用いれば, 系内トランザクションの平均処理時間が求められる。

3.3 シミュレーション結果およびその考察

(3.47)式における流通係数 L は, 参考文献(13)のシミュレーション結果で得られた近似値を数値計算に適用した。以下の表は, トランザクション消滅 C^* に対する L の値である。

表 3.1 トランザクション消滅 C^* と流通係数 L の関係
 Table3.1 The relationship of transaction lost ($C^*(pk/sec)$)
 with transportation parameter (L)

トランザクション消滅(C^*)	流通係数(L)
20	2.02921
25	2.44997
30	2.33040

さらに、トランザクション消滅の計数過程の期待値を $\overline{C} = 1$ 、トランザクション消滅に要する処理時間を $S(k) = 0.001(\text{Sec})$ とする。

シミュレーション条件は、下記の通りである。

- トランザクション生成

トランザクション長：100 バイト(固定)

発生分布：指数分布(分布のパラメータとして平均値を与える($\hat{\alpha}$))

- トランザクションの処理時間(正常処理分)

処理時間：処理速度から算出($\alpha = 40(pk / sec)$ として一定)

- トランザクション消滅

C^* と α の比率により算出 $C^* / (C^* + \alpha)$

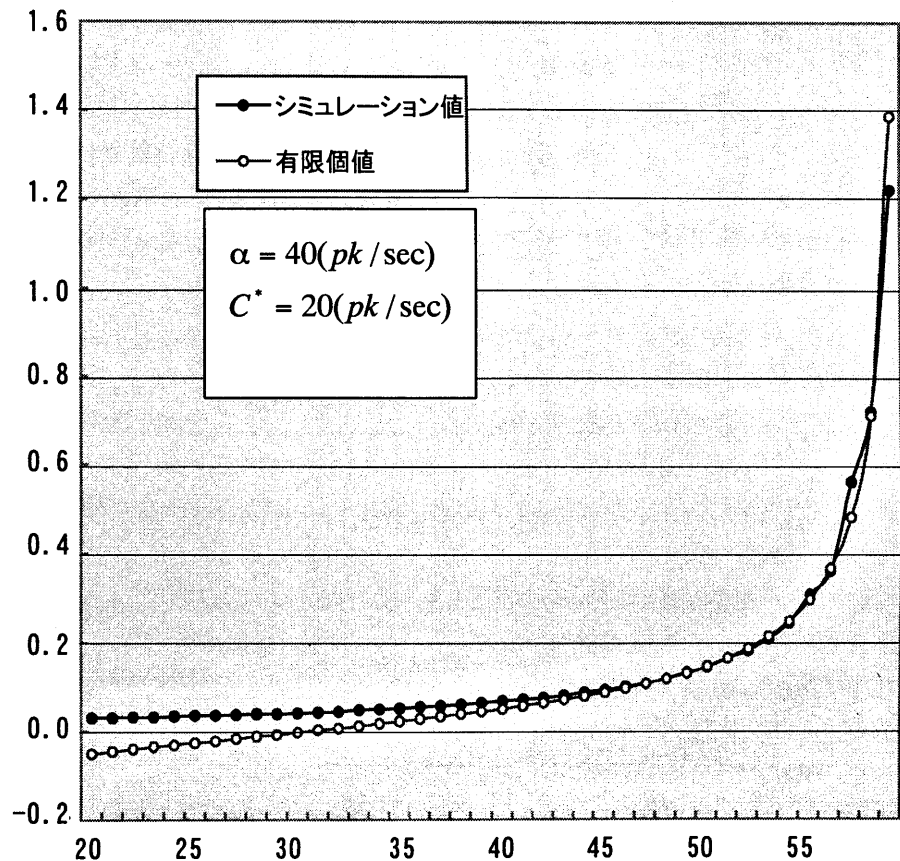
- シミュレーション時間

20000 秒

- 平均処理時間

上記シミュレーション時間中に、処理対象となった各トランザクションの処理時間の平均値(秒)

W_F (sec)



$\hat{\alpha}$ (pk/sec)

図 3.2 平均処理時間に関するシミュレーションおよび数値計算結果

Figure.3.2 The comparison between simulation results and calculation($C^* = 20pk/sec$) results for the transit time-lag in stationary

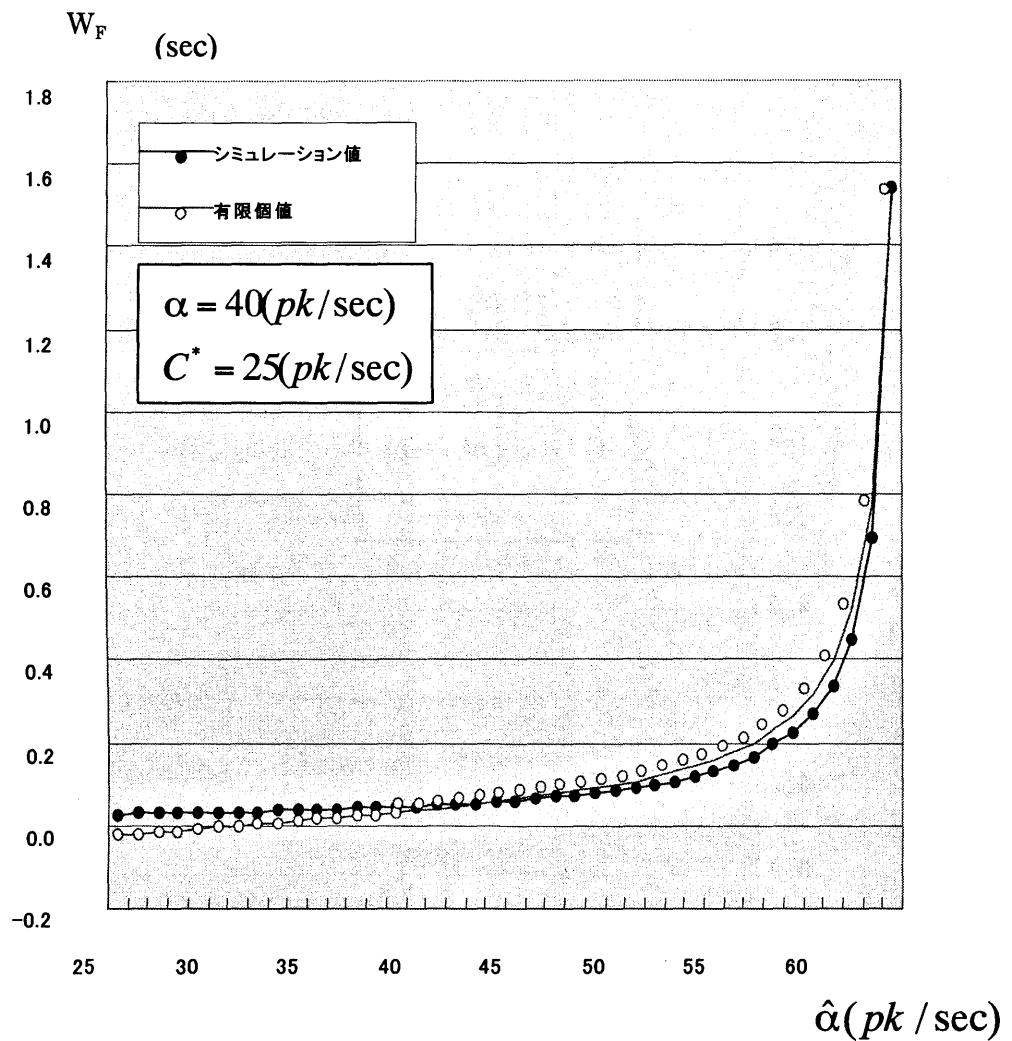


図 3.3 平均処理時間に関するシミュレーションおよび数値計算結果

Figure.3.3 The comparison between simulation and calculation($C^* = 25pk/sec$) results for the transit time-lag in stationary

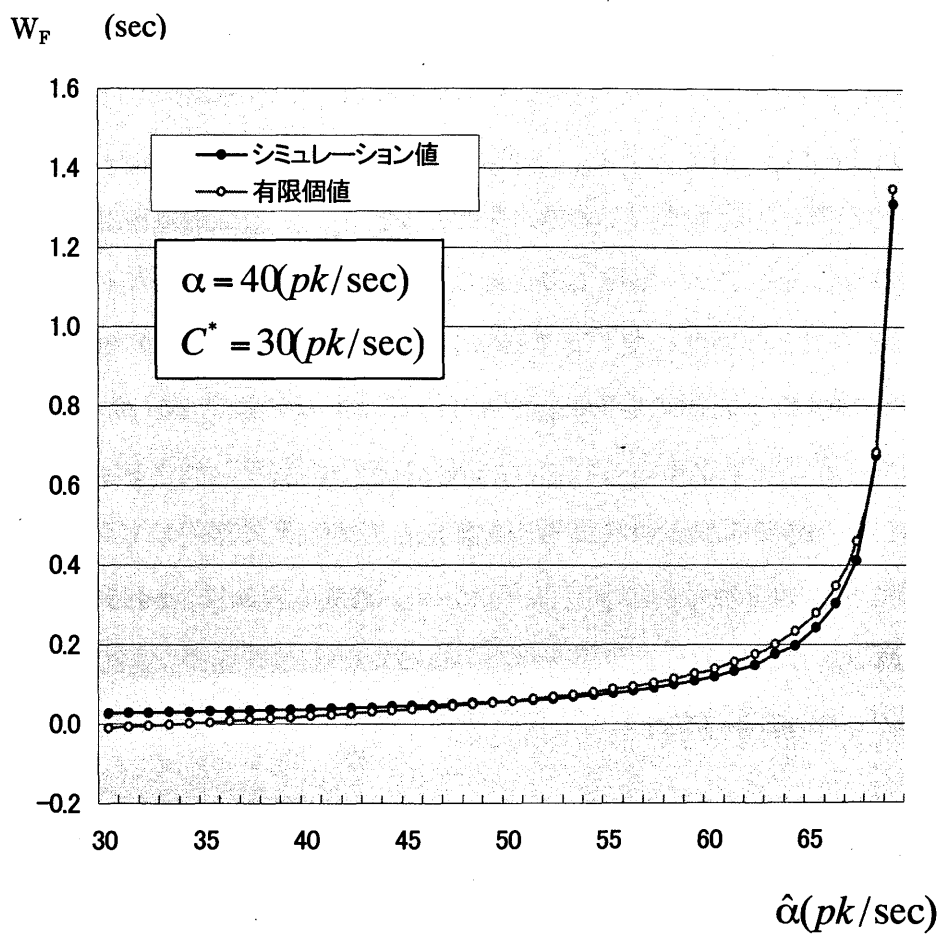


図 3.4 平均処理時間に関するシミュレーションおよび
数値計算結果

Figure.3.4 The comparison between simulation and
calculation ($C^* = 30pk/sec$) results for the
transit time-lag in stationary

図 3.2～図 3.4 について記述する。図 3.2 はポテンシャルインプット $\hat{\alpha}$ の値が、 $30(pk/sec)$ 以下では平均処理時間が負の値となる。これは、入出力レート、トランザクション消滅レートがそれぞれ独立したポアソン過程であると仮定している事に起因している。シミュレーション時間が 20000 秒なのでトランザクション消滅の個数は、400000 個である。

図 3.3 は、図 3.2 と同様にポテンシャルインプット $\hat{\alpha}$ の値が $30(pk/sec)$ 以下では平均処理時間が負の値となる。これは、入出力レート、トランザクション消滅レートがそれぞれ独立したポアソン過程であると仮定している事に起因している。シミュレーション時間が 20000 秒なのでトランザクション消滅の個数は、500000 個である。

図 3.4 は、図 3.2 と同様にポテンシャルインプット $\hat{\alpha}$ の値が $35(pk/sec)$ 以下では平均処理時間が負の値となる。これは、入出力レート、トランザクション消滅レートがそれぞれ独立したポアソン過程であると仮定している事に起因している。シミュレーション時間が 20000 秒なのでトランザクション消滅の個数は、600000 個である。

図 3.2～図 3.4 までの数値計算結果が、シミュレーション結果と同じ傾向を示していることより、(3.47)式は意味のある解析結果と判断した。

3.4 まとめ

本章では、有限個のトランザクション消滅を、ジャンプ型確率微分方程式を用いたシステムモデル式を提案した。ただし、入出力過程及びトランザクション消滅過程を各々独立したポアソン過程であると仮定した。

また、有限個のトランザクション消滅の場合についても平均処理時間を求め、本システムに与える要因は、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響する事を示した。

以上、有限個のトランザクション消滅を考慮した意義は、より現実に近いシステムを検討した点にある。

よって、本章で示した系内処理時間は、容量設計のためのシステム評価手法として活用できる結果を示すことができたと考える。

参考文献

- [1] P. BRÉMAUD "Point process and queues martingale dynamics", pp87, p117, pp. 123-127, Springer-Verlag, New York Inc. 1981
- [2] G.P KLIMOV, "Time Sharing Service Systems I", Theory of Probability and It's Appl. 19 pp. 532-551, 1974
- [3] J.G SHANTHIKUMAR and D.D YAO, "Stochastic monotonicity of the queue lenghs in closed queuing networks", Operations Research 35 pp. 583-588, 1987
- [4] F. BACCELLI, P. BOYER, and G. HEBUTERNE, "A single-server queue with impatient customers", Advances in Applied Probability, vol. 16, pp. 887-905, 1984.
- [5] R. RISHEL, "Dynamic programming and minimum principles for systems with jump Markov disturbances", SIAM J. Contr., vol. 13, pp. 338-371, Feb. 1975.
- [6] ADRIAN SEGALL, THORMAS KAILATH, "The Modeling of Randomly Modulated Jump Process", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-21, No.2 pp. 135-143, March 1975
- [7] P. BRÉMAUD, "Optimal Thinning of a Point Process", SIAM J, CONTROL AND OPTIMIZATION vol. 17, No. 2, March pp. 223-230, 1979
- [8] D.W TCHA and S.R PLISKA, "Optimal control of single-server queuing networks and multi-class M/G/1 queues with feedback", Operations Research 25 pp. 248-258, 1977
- [9] 箕輪弘之:「トークンリング型ネットワークのジャンプタイプ確率微分方程式を用いたモデル化」 電子情報通信学会誌, B-1, vol. J78-B-1, No. 7, pp. 272-278, 1995 年 7 月
- [10] 白井・天野・井上:「衝突を考慮した C/S 型ネットワークのジャンプ型確率微分方程式を用いたモデル化」 電気関係学会関西支部連合大会, 1996 年 11 月
- [11] K. SHIRAI, Y. AMANO and K. INOUE "Stochastic modeling and stationary distributions for the C/S type network with collision by using jump process",

Memories of Institute of Science and Engineering Ritsumeikan University,
Shiga, Japan, No. 55, 1996

- [12] 白井・天野・井上:「フレーム衝突を含む一般化 C/S 型ネットワークのモデル化および定常分布」信学春季全大, 1997 年 3 月
- [13] 白井・天野・井上:「トランザクション消滅のあるシステムの定常解析」電気学会論文誌, vol. 118-C, 1998 年 10 月
- [14] 白井・天野・井上:「有限個のトランザクション消滅を考慮したシステムの定常解析—トランザクション消滅過程の定常系内処理時間について」電気学会論文誌, 平成 12 年 10 月号掲載予定
- [15] 川島幸之助・町原文明・高橋敬隆・斎藤 洋:「通信トラフィック理論の基礎とマルチメディア通信網」p97, (社)電子情報通信学会, 1995 年 11 月
- [16] WALTER A. ROSENKRANTZ “Little’s theorem: A stochastic integral approach”,
Queueing System 12, pp. 319-324, 1992

第4章

ファイナンス論的評価による待ち行列系の最適制御 ー収益レートに対する最適性の条件ー

4.1 まえがき

前章では、トランザクション消滅のあるシステム全体をバーチャルパイプラインと見なして解析したことにより、ある条件のもとで定常分布、および定常分布が存在する条件を示した。また、本システムに与える要因の中では、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きいことを明らかにした。

一方、最適制御問題に関して、LODI LI [1]は製造業において、商品の入庫数及び出庫数は、ポアソン過程を前提にすることにより、点過程、計数過程を用いてモデル化している。制御変数としては、商品の入庫レートと出庫レートを選んでいる。マルチンゲールの理論を活用して、入庫レート、出庫レートの制御問題につなげている[1]。つぎに、最適制御問題として、入庫数と在庫数の和をシステムのトータルコストとし、また、出庫数を出荷高(売上高)と考えることにより、その積分を評価関数として定義、これを最大にする制御変数の条件を求めた。評価関数には、出庫レートを変数とした収益、入庫数と在庫数の和をトータルコストと見なし、価格とコストの差を最大にする最適制御問題を解析している。その結果、最適制御方策は、Bang-Bang 制御になることが確かめられた[1]。

いままでの研究において、ファイナンス理論を活用した評価関数を、待ち行列系の最適制御問題に適用した報告は他にない。

本章では、ファイナンス理論における資産評価のためのポートフォリオ選択という資産配分の理論を活用することを試みる[2]～[5]。すなわち、ポートフォリオ選択の考え方を待ち行列系の最適制御問題に適用し、待ち行列容量及びシステム財の上限に制限を加えた制御システムを考察する。この時“システム財(Wealth)”とは、ファイナンスで言う資産であり、システムに収益をもたらす源泉であり、本システムを構成

する設備と各入出力設備におけるトランザクションから派生する収益の蓄積である。

また，“収益(Revenue)”とは，本システムから出力されるトランザクション量から派生するシステム財であり，ある期間毎のシステム財の評価を行うことにより，システムの最適化条件を求める。ここでは，システム財が，負になることはないという前提に立っている。ただし，システム財の評価関数は，マルコフ性をもつジャンププロセス[6]～[11]を導入し，かつ上方向ジャンプのみを考慮して記述されている。つまり，システム財は常に増大するという考え方を基本にしている[12],[13]。

対象システムのモデル化手法としては，確率過程における計数過程を用いる。また，消滅トランザクションを，システム上で出力構造を持つ独立した計数過程モデルとして定義する。ただし，本章でも，このバーチャルパイプラインに対して，“バーチャルキュー”という前章で提案した考え方を活用する。すなわち，バーチャルパイプライン上で発生するトランザクション消滅を，本システムでの損失(Loss Cost)と考え，さらに損失の中には，システムを維持するための損失も含めることにし，ある“期(Periodical Time)”単位でシステム評価を行うこととする。ただし，“期”とは，ある時間的幅を持った期間を言う。また，収益は，システム財に比例することになり，収益が伸びれば，得られた収益をシステム財に投資出来ることになる。

一方，このシステムが保有する任意の期におけるシステム財は，各入力設備に対して，ある配分率で投資されるものとし，配分率は次期のシステム財が，最大となる様に決定される。それゆえ，本システムの評価関数は，システムにおけるある期のシステム財の最大化として表される。

4.2 対象システム及び解析モデルについて

4.2.1 対象システム及び最適条件について

図 4.1 は，トランザクション消滅のある待ち行列系で，バーチャルキューに容量制限があるシステムである。また， $D(t)$ は，カスタマー要求に対する，システムから顧客へのトランザクション供給である。ここで， N 個ある入力設備の中で， i 番目

の設備から発信されるトランザクションの計数過程を $\{\hat{A}_i(t), t \geq 0\}$ とし、ただし、

$\hat{A}(t) = \sum_{i=1}^N \hat{A}_i(t)$ とする。システムに入力されるトランザクションは、システム内に蓄積され、蓄積されたトランザクションを待ち行列と呼ぶ。時刻 $t(\geq 0)$ におけるその個数を $Q(t)$ とする。ただし、 $Q(t)$ には上限があるものとする。(4.1)式は、図 4.1 の計数過程モデル式である。

$$Q(t) = Q(0) + \hat{A}(t) - (C(t) - D(t)) \quad (4.1)$$

(4.1)式で、 $\hat{A}(t), C(t), D(t)$ はポアソン過程とする。また、 $\hat{A}(t), C(t), D(t)$ は、それぞれ独立した確率過程とする。さらに、 $Q(0)$ は初期値である。

この時、 N 個の入力設備から入力されるトランザクションの点過程を

$$\{\hat{T}_q\} \in \{\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3, \dots\} = \hat{T} \quad (4.2)$$

とすると、入力トランザクション $\hat{A}(t)$ の計数過程は、 N 個の入力設備から入力されたトランザクションの総和であることより、つぎのように表される。

$$\hat{A}(t) = \sum_{q=1}^N \mathbf{1}_{\{\hat{T}_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

また、カスタマからの需要要求に対するシステム供給出力トランザクションの点過程を

$$\{T_r^*\} \in \{T_1^*, T_2^*, T_3^*, \dots\} = T^* \quad (4.4)$$

とすると、出力されるトランザクションの計数過程は、

$$D(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_r^* \leq t\}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

と表される。つぎに、消滅トランザクションの点過程を

$$\{C_r\} \in \{C_1, C_2, C_3, \dots\} = C \quad (4.6)$$

とすると、消滅トランザクションの計数過程は

$$C(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{C_r \leq t\}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

と表される。ここで、上記指示関数 $\mathbf{1}_{\{ \cdot \}}$ は、集合 $\{ \cdot \}$ 上で 1、それ以外では 0 の値をと

る指示関数である。次に、収益について記述するにあたり、収益 $P_i(t)$ の存在する確率空間を定義する。

いま、 (Ω, F) は可測空間であり、 I は、 $[0, \infty)$ として時間区間を定義する。又、確率空間は (Z_t, F_t, P) $t \in I$ と表され、 P は (Ω, F) における確率測度、 (F_t) は増大する σ -集合体の族であり、 (Z_t) は (F_t) に適合するランダム変数の族である。

図 4.1 全体における任意の t 期におけるシステム財を $W(t)$ と表すと、各入力設備に対して t 期に

$$k_i(t)W(t^-), \quad \sum_{i=1}^N k_i(t) = 1 \quad (4.8)$$

の様に投資される。この時、 $k_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ を各入力設備に対する投資配分率と呼ぶ。

(4.1)式で定義した本システムの計数過程モデルと収益／システム財の関係について述べる。いま、本システムにおけるシステム財 $W(t)$ は、次式の様に表す。

$$W(t) = a_1 D(t) - (a_2 \hat{A}(t) - a_3 C(t) - a_4 Q(t)) \quad (4.9)$$

ただし、 $a_1, \dots, a_4 > 0$ であり、各系の単位係数を表す。

この時、 $D(t) \geq 0, \hat{A}(t) \geq 0, C(t) \geq 0, Q(t) \geq 0$ であり、 $D(t)$ は出荷高、 $\hat{A}(t)$ は入荷高、 $C(t)$ は損失高、 $Q(t)$ は在庫高を意味する。

つぎに、(4.1)式で表現される計数過程に対して、単位時間あたりに供給されるトランザクション数に応じた収益を $\{P_i(t^-)\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ と表す。ここで、現在の過程 $\{P_i(t)\}$ は、直前の過程 $\{P_i(t^-)\}$ にのみ依存している。ただし、 $P_i(t^-) = \lim_{s \uparrow t} P_i(s)$ である。また、 t は、 $t \in [0, \tau]$ の間での連続した値をとる。さらに、 τ は、期末での時刻を表す。この時、任意の期全体での収益を $\{P_i(t)\}$ とすると、任意の期全体での収益は、

$$\begin{aligned} P_i(t) &= P_i(t^-) + \eta_i(t)P_i(t^-) \\ &= P_i(t^-)\{1 + \eta_i(t)\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

ただし、 $\eta_i(t) \geq -1$ である。

この不等式は、 $P_i(t) \geq 0$ のための条件である。この時、 $\eta_i(t)$ はある確率分布関数 $n(\eta_i(t), t)$ の存在を仮定している。

つぎに、ジャンププロセスの確率過程 $J_{p_i}^W(d\eta_i, dt)$ は、以下の様に定義する。

$$\begin{aligned} J_{p_i}^W(d\eta_i, dt) \\ = \hat{n}(d\eta_i, t, \hat{k}_i(t)) p_i(t) dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

と表す。ここで、 $\hat{n}(d\eta_i, t, \hat{k}_i(s))$ に関して

$$\hat{n}(d\eta_i, t, \hat{k}_i(t)) = \hat{n}(d\eta_i, t, \hat{k}_i(t), W(t^-)) \quad (4.12)$$

$$p_i(t) = p_i(t, W(t^-)) \quad (4.13)$$

$$\hat{k}_i(t) = \hat{k}_i(t, W(t^-)) \quad (4.14)$$

と仮定する。ただし、 $\hat{n}(\bullet)$ は、 (\bullet) 内の変数に対する分布関数である。

すなわち、(4.12)～(4.14)式によれば現在のシステム財 $W(t)$ は、過去の直前のシステム財 $W(t^-)$ にのみ依存する。このように定義すると確率過程 $\{W(t), J_{p_i}^W\}$ はマルコフ過程となる [14]。

上述の $\eta_i(t), W(t)$ は $\eta_i(t) \in Z_i$ であり、 $W(t) \in F_i$ である。また、入力設備から供給されるトランザクションの収益率は

$$dP_i(t) / P_i(t^-) \quad (4.15)$$

と表せる。それゆえ、この様な収益の変化に対応して各入力設備における収益も変化する。これにより、システム財の変化分は

$$\begin{aligned} dW(t) &= \sum_{i=1}^N k_i(t) W(t^-) \frac{dP_i(t)}{P_i(t^-)} \\ &= \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) dP_i(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

と表せる。 $k_i(t)$ は、(4.8)式で定義されている。ただし、 $\hat{k}_i(t) = k_i(t) / P_i(t^-)$ である。また、 $W(t^-)$ はある期の直前の入力設備全体へのトランザクション数(システム財)である。 $dP_i(t)$ は、期における収益の変化分を表す。

ここで、 N 個の収益レート $\{p_i(t), t \geq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ の拘束条件を次の様に決める。

$$0 \leq p_i(t) \leq \lambda_i(W(t)) \quad (4.17)$$

$\{\lambda_i(W(t)); t \geq 0\}$ は、非負の値であり、待ち行列容量の制限に伴う上限値である。この時、制御変数として $p_i(t)$ を考えると、この制御変数のもとで次式を最大にするこ

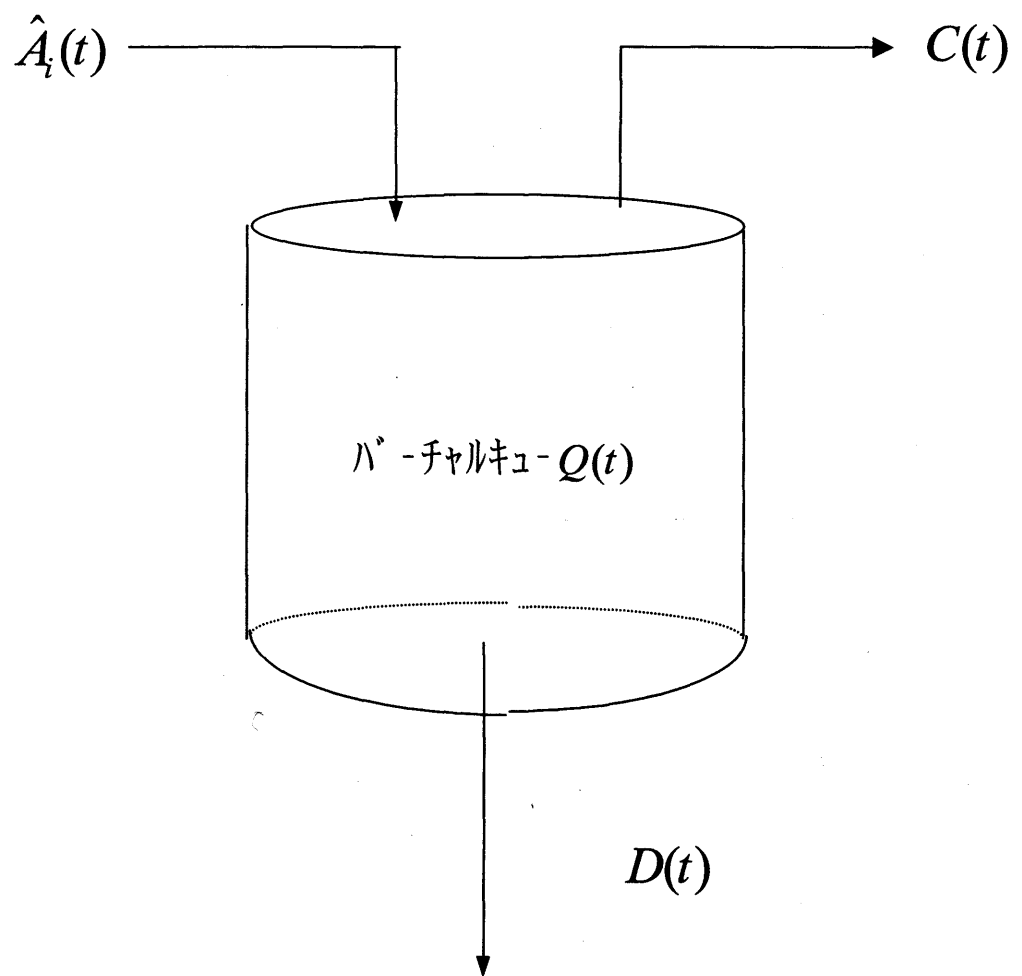


図 4.1 各入力設備から中央設備へのトランザクション流通概念図

Figure 4.1 The concept of virtual queue from inputs to output

とが本システムの目的である。

$$E_x \int_0^\infty e^{-rt} dW(t) \quad (4.18)$$

E_x は条件付期待値である。 $r(>0)$ はディスカウントファクターである。(4.17)式の拘束条件の下で、(4.18) 式に(4.16)式を代入すると次式を得る。

$$E_x \int_0^\infty e^{-rt} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) dP_i(t) \quad (4.19)$$

さらに、ファイナンス制御問題における評価関数は、次式のように定義出来る【付録 E 参照】。

$$V^B(x) = E_x \int_0^\infty e^{-rt} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) \lambda_i^B(W(t)) dt \quad (4.20)$$

ただし、(4.20)式は、制御変数である収益レート $\{p_i(t), t \geq 0\}$ が、(4.17)式の拘束条件のもとで、最適上限値 $\{\lambda_i^B(W(t))\}$ をとる。これは、待ち行列 $Q(t) \in [0, B]$ における待ち行列上限値 B の存在を前提とすれば、システム全体の収益を最大にするには、収益の最適上限値を取れば良いことになる。

4.2.2 切り替え制御とその評価関数について

制御変数 $\{p_i(t)\}$ の拘束条件を $Q(t)$ の拘束のもとで、非負の整数 B (待ち行列数の最大値) に関して

$$p_i(t) = \begin{cases} \lambda_i(W(t)), & \text{if } W(t) \leq B-1 \\ 0, & \text{if } W(t) > B \end{cases} \quad (4.21)$$

の様に表す。(4.21)式の制御変数 $\{p_i(t)\}$ は、待ち行列の最適上限値 B により決定される切り替え制御である。また切り替え制御 $\{p_i(t), t \geq 0\}$ は、(4.17)式より最適上限値として下記の値を取る。

$$p_i(t) = \lambda_i^B(W(t)) \quad (4.22)$$

即ち、(4.21)式は、切り替え制御 $\{p_i(t), t \geq 0\}$ のもとで、収益は、待ち行列上限値 B を超過すると、そのレートは 0 になる。

【命題】

評価関数 $V^B(x)$ は、切り替え制御のもとで次の差分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \lambda_i^B(x) + r \right] V^B(x) \\ &= \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \lambda_i^B(x) [1 + V^B(x+1)] \end{aligned} \quad (4.23)$$

ただし、 $x = 0, 1, 2, \dots$ である。

【証明】

切り替え制御 $\{p_i(t), t \geq 0\}$ のもとで、(4.20)式の評価関数の期待値は、以下のようになる。 $T(y) = \inf\{t \geq 0, W(t) \neq W(0) | W(0) = x\}$ は、 $y \neq x$ である最初の状態 $y = W(t)$ に到達する時刻である。この時、 $T(y)$ は、レート $\{\sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \lambda_i^B(x)\}$ を持つ指数分布と仮定する[15]。この時、 $T(y)$ はマルコフストップピングタイムと呼ばれる。さらに、参考文献[15]より次式を得る。

$$\begin{aligned} V^B(x) &= E_x \int_0^{T(y)} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) e^{-t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) \lambda_i^B(t)} dt \\ &+ E_x \left[\sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) e^{-t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) \lambda_i^B(t)} V(W(T(y))) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

ここで、(4.24)式の第一項の期待値は

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \cdot \lambda_i^B(x) \frac{1}{r} E(1 - e^{-rT(y)}) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \lambda_i^B(x)}{\sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \lambda_i^B(x) + r} \end{aligned} \quad (4.25)$$

となり、(4.24)式第二項は上述 $T(y)$ の性質を利用することにより次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) E(e^{-rT(y)}) \cdot \\
& E\{E_x[V^B(T(y))|W(T(y))]\} \\
& = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \lambda_i^B(x)}{\sum_{i=1}^N \hat{k}_i(x) W(x^-) \lambda_i^B(x) + r} [V^B(x+1)]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

(4.25), (4.26)式を(4.24)式に右辺に代入すれば, (4.24)式が得られる。

【証明終り】

4.2.3 最適条件

与えられた制御変数である収益レート $\{p_i(t), t \geq 0\}$ に関して, 時刻 t に関する制御を考える。この時, 制御変数 $\{p_i(t), t \geq 0\}$ は, 期の中では(4.21)式の様な切り替え制御となる。よって, 評価関数は次式で与えられる[15]。

$$\begin{aligned}
V_t^{p_i}(x) &= E_x \int_0^t e^{-rs} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) p_i(s) ds \\
&+ E_x[e^{-rt} V^B(W(t))]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

ここで, $E_x[e^{-rt} V^B(W(t))]$ を求めるために次の積分を考える。

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-rs} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) dV^B(W(s)) \\
&= e^{-rt} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) V^B(W(t)) - V^B(W(0)) \\
&+ r \int_0^t e^{-rs} V^B(W(s)) ds
\end{aligned} \tag{4.28}$$

ただし, $V^B(W(0))$ は積分初期値を意味する。

両辺に期待値を取ると, (4.28)式は次式になる。

$$\begin{aligned}
& E_x \int_0^t e^{-rs} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) dV^B(W(s)) \\
&= E_x [e^{-rt} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) V^B(W(t))] - V^B(x_0) \\
&\quad + E_x [r \int_0^t e^{-rs} V^B(W(s)) ds]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

ただし，初期値 $x = W(0)$ とする。

(4.9)式においてシステム財 $W(t)$ の条件として $W(t) > 0$ とおくことによりジャンププロセス $\{W(t), t \geq 0\}$ は，上方向だけのジャンプを考えれば良い。よって，次式を得る。

$$\begin{aligned}
& E_x \int_0^t e^{-rs} dV^B(W(s)) \\
&= E_x [\int_0^t e^{-rs} p_i(s) \Delta V^B(W(s) + 1) ds]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

ただし， $\Delta V^B(W(s) + 1) = V^B(W(s) + 1) - V^B(W(s))$ である。

(4.29)と(4.30)式により次式を得る。

$$\begin{aligned}
& E_x [e^{-rt} V^B(W(t))] \\
&= V^B(x) + E_x [\int_0^t e^{-rs} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) p_i(s) \\
&\quad \times \Delta V^B(W(s) + 1) ds] - E_x [\int_0^t r e^{-rs} V^B(W(s)) ds]
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ここで，(4.23)式より次式を得る。

$$\begin{aligned}
& r V^B(W(t)) \\
&= \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) \lambda_i^B(W(t)) [1 + V^B(W(t) + 1)] \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) \lambda_i^B(W(t)) V^B(W(t))
\end{aligned} \tag{4.32}$$

よって，期中の評価関数(4.27)式に(4.31)式を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}
V_t^{p_i}(x) &= V^B(x) + E_x \int_0^t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) p_i(s) ds \\
&\quad + E_x \int_0^t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) p_i(s) \Delta V^B(W(s) + 1) ds \\
&\quad - E_x \left[\int_0^t r e^{-rt} V^B(W(t)) \right]
\end{aligned} \tag{4.33}$$

(4.33)式右辺第四項に(4.32)式を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}
V_t^{p_i}(x) &= V^B(x) + E_x \int_0^t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) p_i(s) ds \\
&\quad + E_x \int_0^t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) p_i(s) \Delta V^B(W(s) + 1) ds \\
&\quad - E_x \left[\int_0^t e^{-rs} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) \lambda_i^B(W(s)) \right. \\
&\quad \times \{1 + V^B(W(s) + 1) \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) \lambda_i^B(W(s)) V^B(W(s))\} ds \right]
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(4.34)式を整理すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}
V_t^{p_i}(x) &= V^B(x) + E_x \int_0^t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) \\
&\quad \times p_i(s) (1 + \Delta V^B(W(s) + 1)) ds \\
&\quad - E_x \left[\int_0^t e^{-rs} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) \lambda_i^B(W(s)) \right. \\
&\quad \times \{1 + \Delta V^B(W(s) + 1)\} ds \Big]
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
V_t^{p_i}(x) &= V^B(x) + E_x \int_0^t \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(s) W(s^-) \\
&\quad \times (p_i(s) - \lambda_i^B(W(s))) (1 + \Delta V^B(W(s) + 1)) ds
\end{aligned} \tag{4.36}$$

これより、 $t \rightarrow \infty$ において $V_t^{p_i}(x) \leq V^B(x)$ となる条件は、 $0 \leq p_i(t) \leq \lambda_i^B(W(t))$ かつ $k_i(s) \geq 0$ 。即ち、(4.27)式の t 期中の最適問題においては、この様な評価関数を最大にする制御変数は

$$0 \leq p_i(t) \leq \lambda_i^B(W(t)), \quad k_i(t) \geq 0 \tag{4.37}$$

の中で求まる。

4.3 まとめ

本章では、ファイナンス理論におけるポートフォリオの考え方を活用することにより、(4.19)式のような収益最大問題における最適解が存在する条件を求めた。

制御変数として収益率を選んだ理由は、システム維持・管理の評価として待ち行列系に対応するシステムにどれだけ収益をもたらすかが、企業にとって見れば最終的な評価に繋がるからである。さらに、最適問題を考慮する上で、本章で取り扱っているようなシステムのパイプライン容量を拘束条件として認識しておけば良いことが明らかになった。

もし、最適な投資配分係数 $k_i(t)$ が存在するものとすれば(4.36)式において、 $k_i(t) < 0$ である時は、(4.37)式のような最適解は存在しないことになるが、 $k_i(t)$ の条件は、 $\sum_{i=1}^N k_i(t) = 1$ であるから、 $k_i(t) < 0$ はこの条件を満足している。このことは、

収益率の悪いかつ分散の大きな設備(ルート)が存在する場合、このような $k_i(t)$ が選択される場合もある。

しかし、最適な投資配分係数を決定するには、ファイナンス理論における平均・分散モデルを活用しないと説及出来ない。それ故、少なくとも、本システムでは、 $k_i(t) < 0$ の場合にはその設備(ルート)に対しては入力をさせないことになる。ファイナンスでは、投資配分率が「負」という値を取り得るが、本システムでは、投資配分率が「負」という値を取り得ない。この点が、ファイナンスと待ち行列系との違いであることが明らかになった。

それゆえ、このような設備ルート(投資配分率が負と計算される様な設備)は、収益を大きく $\{p_i(t) > \lambda_i^B(W(t))\}$ し、かつその分散を小さくすることがなければ、システム財全体の最大化の要素から外されることになる。

参考文献

- [1] LODI LI "A stochastic theory of the Firm", Mathematics of operations research, vol. 13, No. 3, August, 1988
- [2] 宮武信春:「ファイナンス理論のなかの最適制御則」 計測と制御, vol.30, No. 7, pp. 616-622, 1991年7月
- [3] 森村英典・木島正明:「ファイナンスのための確率過程」 pp. 117-140, 日科技連, 1995年4月
- [4] 沢木勝茂:「ファイナンス数理」 pp. 87-143, 朝倉書店, 1994年12月
- [5] JUDD, K.L., and PETERSEN, B.C., "Dynamic Limit Pricing and Internal Finance", Journal of Economic Theory, vol. 39, pp. 369-399, 1986.
- [6] P. BRÉMAUD "Point process and queues martingale dynamics", pp87, p117, pp. 123-127, Springer-Verlag, New York Inc. 1981
- [7] R.F. HARTL and P.M. KORT, "Marketable Permit in a Stochastic Dynamic Model of the Firm", Journal of Optimization and Application: vol.89, No.1 pp. 129-155, 1996
- [8] A. SEGALL and T. KAILATH "The modeling of randomly modulated jump process", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-21, No. 2, pp. 135-143, March, 1975
- [9] P. BRÉMAUD, "Optimal Thinning of a Point Process", SIAM J, CONTROL AND OPTIMIZATION vol. 17, No. 2, March pp. 223-230, 1979
- [10] R. RISHEL, "Dynamic programming and minimum principles for systems with jump Markov disturbances", SIAM J. Contr., vol. 13, pp. 338-371, Feb. 1975.
- [11] ADRIAN SEGALL, THOMAS KAILATH, "The Modeling of Randomly Modulated Jump Process", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-21, No.2 pp. 135-143, March 1975
- [12] 白井・天野・井上:「衝突を考慮した C/S 型ネットワークのジャンプ型確率微分方程式を用いたモデル化」電気関係学会関西支部連合大会, 1996年11月
- [13] 白井・天野・井上:「ファイナンス論的評価による待ち行列系最適制御ー収益レ

ートに対する最適性の条件」電気学会論文誌, Vol.120-C, 2000 年 4

[14] 宮沢政清:「確率と確率過程」p90, p168, 近代科学社(1993)

[15] HONG CHEN and DAVID D. YAO "Optimal intensity control of a queuing system with state-dependent capacity limit", IEEE, Trans. Auto. cont. vol. 35, No. 4, pp. 459-464, APRIL, 1990

第 5 章

トランザクション消滅のある待ち行列系の最適配分法 ーファイナンス論的アプローチー

5.1 まえがき

前章では、ファイナンス理論におけるポートフォリオの考え方を待ち行列系の最適制御問題に適用し、待ち行列容量及びシステム財の上限に制限を加えた制御システムを考察した。その結果、最適制御方策は、切り替え制御になることを明らかにした。さらに、収益最大問題における最適解が存在する条件を求めた。

しかし、最適な投資配分係数を決定するには、ファイナンス理論における平均・分散モデルを活用する必要がある[1]～[4]。

本章では、トランザクション消滅を考慮した N 個の並列 $M/M/1$ 型の待ち行列系に対して、トランザクションの流通量を最大にするための最適配分を決定することを提案する。本章での前提は、トランザクション消滅は、入力に依存することである。

前章までの研究では「トランザクション消滅は、入力とは独立した計数過程である。」と論じた。本章でもちいている手法は、ファイナンス理論の中で用いられている平均・分散モデルである。

入力トランザクションの獲得確率の平均・分散が既知の場合、 N 個の並列な待ち行列の出力側から上流過程に注目している。また、最初のゲートウェイで破棄されるトランザクションが発生する。さらに、 N 個のルートでトランザクション消滅が発生する。つまり、出力側から入力側に注目した場合、各ルート上のトランザクションレートそのものの変動、ゲートウェイでの破棄、トランザクション消滅及び各ルート固有の問題で出力側に影響を受ける結果となる。

各ルートでのトランザクション消滅及び損失は、システムパラメータと見なし、各ルートを流通するトランザクションレートの変動を、ジャンププロセスを応用して動的モデルを定義する。この動的モデルの中で各レートの変動は、入力トランザクシ

ンのロス確率及び獲得確率に依存している。

さらに、各レートの変動は、伊藤型確率微分方程式[5]で規定されるものと仮定する。最適制御問題としては、制御区間の終端値で獲得入力レートを最大にする問題を考え、分岐ルートに対する最適な配分係数を求める [6]。

以上のことを踏まえた上で、入力トランザクションの獲得レートの変動が伊藤型確率微分方程式に従うものとすれば、ある適当な評価汎関数のもとで最適配分係数は、獲得レートの確率的性質にのみ依存することを明らかにする。

5.2 対象システム及び動的配分係数の決定について

5.2.1 システム記述

図 5.1 は、ある待ち行列系において、システムのゲートに到着するトランザクションが一部ゲートでリジェクションされることを考慮している。ゲートを通じたトランザクションは N 個の並列 $M/M/1$ の待ち行列系に分配される。各トランザクションは、 N 個の並列ルートではトランザクション消滅が発生する。ゲートまでの入力トランザクションを”ポテンシャルインプット”と、ゲートを通じたトランザクションを”アクチュアルインプット”とすることにする。

図 5.2 は、図 5.1 のトランザクションをレートで表現したものである。 $\phi_i(t)$ は、ルート i 番目におけるトランザクション配分係数である。本システムでの評価目的は、このポテンシャルインプットの獲得量が最大になる様に、各システムルートにおける配分係数 $\phi_i(t)$ を決定している。ある待ち行列系において、システムに到着するトランザクションは、時刻 $\{\hat{T}_q, q = 1, 2, \dots\}$ で到着する。この時点列は、レート $\hat{\alpha}(t)(> 0)$ のポアソン点過程に従うものとする。また、リジェクトされるトランザクションは、時刻 $\{T_r^*, r = 1, 2, \dots\}$ でシステム外にリジェクトされる。この時、その時点列は、レート $r(t)(> 0)$ のポアソン点過程に従うものとする。システムの入力トランザクションは、時刻 $\{T_q, q = 1, 2, \dots\}$ で出力され、かつ、その時点列は、レート $\alpha(t)(> 0)$ のポア

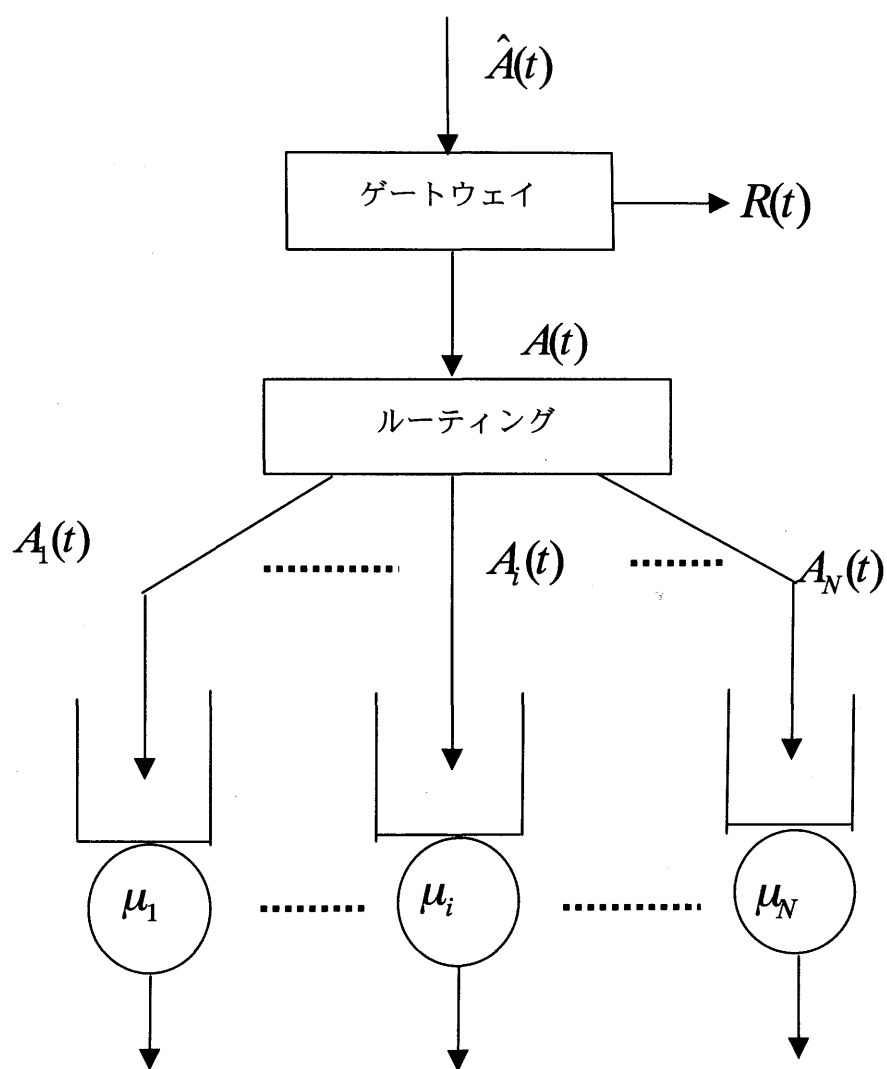


図 5.1 システム概念図

Figure5.1 System configuration

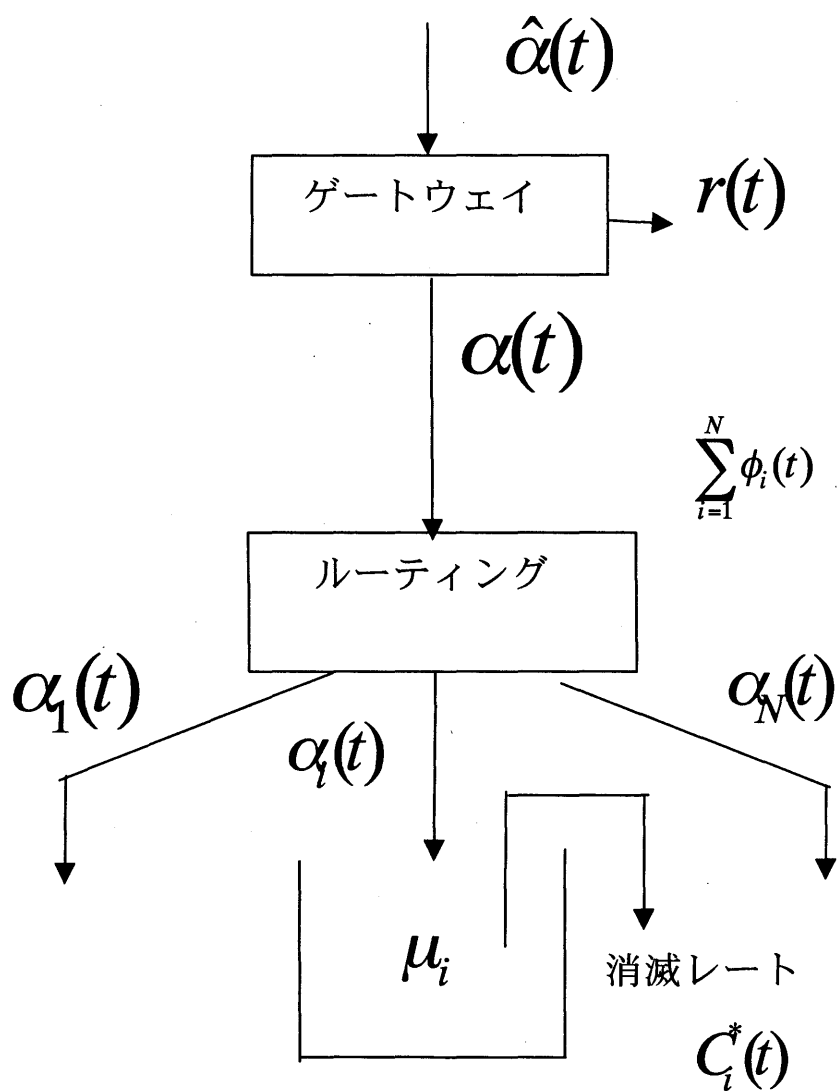


図 5.2 システム等価図

Figure 5.2 Equivalent system for Figure 5.1

ソン点過程に従うものとする。

ここで、 $\{\hat{A}(t); t \geq 0\}$ はポテンシャルインプットを表す計数過程(確率過程)とする

$$\text{時, } \hat{A}(t) \text{ の計数過程は } \hat{A}(t) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\hat{T}_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

また、アクチュアルインプット $A(t)$ の計数過程は

$$A(t) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_q \leq t\}}, \quad q = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

と表される。ただし、各ルートにおける入力は

$$A(t) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \quad (5.3)$$

と表される。リジェクトされるトランザクションの点過程は

$$\{T_r^*\} \in \{T_1^*, T_2^*, T_3^*, \dots\} = T^* \quad (5.4)$$

であることから、リジェクトされるトランザクションの計数過程は、

$$R(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_r^* \leq t\}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

と書ける。消滅トランザクションの点過程は

$$\{C_r\} \in \{C_1, C_2, C_3, \dots\} = C \quad (5.6)$$

であることから、消滅トランザクションの計数過程は

$$C(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{C_r \leq t\}}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

上記指示関数 $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ は、集合 $\{\cdot\}$ 上で 1、それ以外では 0 の値をとる指示関数である。

例えば、 $\sum_{q=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_q \leq t\}}$ は、時刻 $\{0 \leq T_q \leq t\}$ で $\{T_q\}$ の個数をカウントしている。

本システムのモデル式は、

$$A(t) = \hat{A}(t) - R(t) - C(t) \quad (5.8)$$

である。ここに、 $R(t)$ は入力側で制御されるリジェクション。 $C(t)$ は、各ルートにおけるトランザクションの消滅を表している。

この解析モデルは、ポテンシャルインプット、アクチュアルアウトプットおよびリ

ジェクトされるトランザクションをそれぞれ独立した確率過程として待ち行列を表現している。連続時間下でのトランザクションの動作をより忠実に表現できるところに、計数過程の利点がある。入出力過程とリジェクトされるトランザクションの確率過程を、それぞれ独立したポアソン過程と仮定している。

ここで、各ルートにおける消滅トランザクションのレートを $C_i^*(t)$ と置くと、この $C_i^*(t)$ は各ルートにおける待ち行列のパラメータ(例えば、dead time τ_i 、サービスレート μ_i ...)に依存するものとし、その消滅確率(ロス確率)を $P_i(\varphi_i(t))$ と表す。ただし、 $\varphi_i = \{\tau_i, \mu_i, \dots\}, i = 1, 2, \dots, N$ と置く。この時、 $P_i[\varphi_i(t)]$ に対応して獲得確率を $f_i[\varphi_i(t)]$ と表し、

$$f_i[\varphi_i(t)] = 1 - P_i[\varphi_i(t)] \quad (5.9)$$

を定義する。ただし、 $i = 1, 2, \dots, N$ である。

ここで、アクチュアル入力過程 $A(t)$ のレート $\alpha(t)$ の変動をとらえることにより、その動的モデルを

$$d\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) \alpha(t^-) df_i[\varphi_i(t)] \quad (5.10)$$

と表す。ただし、 $\alpha(t^-) = \lim_{s \uparrow t} \alpha(s)$ である。

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(t) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.11)$$

この時、 $f_i[\varphi_i(t)]$ は、伊藤型確率微分方程式に従い変動するものとする。

$$df_i[\varphi_i] = a_i(t) f_i[\varphi_i] dt + b_i(t) f_i[\varphi_i] dZ_i(t) \quad (5.12)$$

と表すことができる。ただし、 $i = 1, 2, \dots, N$ である。

【付録 F 参照】

(5.12)式の $Z_i(t)$ は、独立増分 $dZ_i(t)$ を持つウィナー過程であり[8]、平均は零、分散は dt を持つものとする。

以上の様に、各ルートに入力されるトランザクションの獲得レートの変動を表すモデルが(5.8)～(5.12)式の様に表された。

5.2.2 動的配分係数の決定

(5.8)～(5.12)式のモデルに対して、最適制御問題における終端値制御問題として、制御区間 $t = (0, T]$ における評価関数を $J[\alpha(T)]$ と表す。即ち、制御区間の終端時刻におけるアクチュアル入力レートの最大を目的とした汎関数である。それ故、この評価関数に対する任意の時刻 $t < T$ に対して、 $V(w, t)$ を

$$V(w, t) = \sup_{\substack{\phi(\tau) \\ t \leq \tau \leq T}} E \left[J \{ \alpha(T) | \alpha(t) = w \} \right] \quad (5.13)$$

と定義する。ただし、 $E[\cdot]$ は期待値演算を表す。

この時、次の命題を得る。

【命題】

(5.8)～(5.12)式により表されるシステムにおいて、制御区間の終端値でアクチュアル入力レートを最大にする制御問題に対して、アクチュアル入力レートの最適配分(Routing)係数は、各分岐ルートにおけるトランザクション獲得確率の特性にのみ依存する。ただし、(5.13)式は、時間項が独立した関数と仮定する。つまり、変数分離法を用いて、解析解が求められることを前提としている。

【証明】

今、(5.13)式で定義された評価関数に対して最適化方程式は

$$\sup \{ \mathcal{L}_w V(w, t) \} = 0 \quad (5.14)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_w V(w, t) = & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \left[\sum_{i=1}^N \alpha(t^-) \phi_i(t) a_i(t) \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \sum_{i=1}^N \left[\alpha(t^-) \phi_i(t) b_i(t) \right]^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

である[3]。この時、

$$J[\alpha(T)] = V(w, T), \quad \sum_{i=1}^N \phi_i(t) = 1 \quad (5.16)$$

となる。さらに、(5.14)～(5.16)の拘束のもとでラグランジェ関数は

$$L[\phi(t), \lambda] = \mathcal{L}_w V(w, t) + \lambda \left[1 - \sum_{i=1}^N \phi_i(t) \right] \quad (5.17)$$

と定義できる。それ故、(5.16)式より最適性の条件は

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_i} = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^N \phi_i(t) = 0 \quad (5.19)$$

が得られる。ここで、(5.18)式によれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \phi_i} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha} \alpha(t^-) a_i(t) + \\ &\quad \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \alpha^2(t^-) b_i^2(t) \phi_i(t) - \lambda = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

が得られる。(5.20)式より $\phi_i(t)$ を求めると

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= \frac{\lambda - V_\alpha \alpha(t^-) a_i(t)}{V_{\alpha\alpha} \alpha^2(t^-) b_i^2(t)} \\ &= \frac{\lambda b_i^{-2}(t) - V_\alpha \alpha(t^-) b_i^{-2}(t) a_i(t)}{V_{\alpha\alpha} \alpha^2(t^-)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

が得られる。ただし、(5.21)式において

$$V_\alpha = \partial V / \partial \alpha, \quad V_{\alpha\alpha} = \partial^2 V / \partial \alpha^2$$

と置いた。ここで、(5.21)式の両辺において $i = 1 \sim N$ までの和をとり、(5.19)式を満足する様に λ を求めると

$$\lambda = \frac{V_{\alpha\alpha}\alpha^2(t^-)}{\sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)} + \frac{V_{\alpha}\alpha(t^-) \sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)a_i(t)}{\sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)} \quad (5.22)$$

となる。この時、(5.21), (5.22)式より最適な $\phi_i(t)$ は

$$\begin{aligned} \phi_i^*(t) = & \frac{b_i^{-2}(t)}{\sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)} + \frac{V_{\alpha}}{V_{\alpha\alpha}\alpha(t^-)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)a_i(t)}{b_i^{-2}(t) \sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)} \\ & - \frac{V_{\alpha}}{V_{\alpha\alpha}\alpha(t^-)} \cdot \frac{a_i(t)}{b_i^{-2}(t)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

と求まる。ここで、 $V(w,t)$ は、(5.23)式を(5.14)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V_{\alpha} \sum_{i=1}^N \alpha(t^-) \phi_i^*(t) a_i(t) \\ + \frac{1}{2} V_{\alpha\alpha} \sum_{i=1}^N [\alpha(t^-) \phi_i^*(t) b_i(t)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

を満足する。この時、(5.23)式において $\phi_i(t)$ が $V(\alpha,t)$ に依存しない様に決定するものとする。

まず、命題の仮定より、 $V(\alpha,t)$ は、変数分離法を用いれば、

$$V(\alpha,t) = \hat{V}(\alpha)G(t), G(T) = 1 \quad (5.25)$$

と書ける。(5.23)式において、 V_{α} と $V_{\alpha\alpha}$ との比に関して

$$\frac{V_{\alpha}}{V_{\alpha\alpha}\alpha(t^-)} = a \quad (5.26)$$

と置くと簡単な計算により

$$\hat{V}(\alpha) = C_0 \frac{1}{\xi} \alpha^{\xi} \quad (5.27)$$

ただし、 $0 < \xi < 1$ が得られる。

それゆえ、(5.23), (5.27)式より

$$\phi_i^*(t) = \frac{b_i^{-2}(t)}{\sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)} + \frac{1}{\xi - 1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t) a_i(t)}{b_i^2(t) \sum_{i=1}^N b_i^{-2}(t)} - \frac{1}{\xi - 1} \cdot \frac{2a_i(t)}{b_i^2(t)} \quad (5.28)$$

が得られる。

【証明終り】

以上の様に、最適ルーティング係数 ϕ_i^* は、(5.27)式の様に $\hat{V}(\alpha)$ が選ばれるものとする、獲得レートの変動を規定する伊藤型確率微分方程式の係数にのみ依存することが確認出来た。

すなわち、評価関数を変数分離により時間項が独立の関数として扱え、適当な関数を選ぶと最適ルーティング係数を決定することができた。獲得レート、獲得確率の確率的性質にのみ依存することが確認できた。

以下では定常問題にこの考え方を応用する。前章において、最適ルーティング係数は、ファイナンス理論を応用することにより最大利益問題に対して定常問題を考えた時、得られた配分係数が最適であることを明らかにした。

それゆえ、本章では動的モデルに対して、トランザクション流通量を最大にする評価関数に対して最適な動的配分係数を求めた。

5.2.3 定常モデルに対する配分係数の決定

図 5.1 の様なシステムに対して、定常的な最適配分係数の決定について考察する。定常状態では、前記命題で仮定した評価関数の変数分離法は適用していない。つまり評価関数は、 $V(\alpha, t) = \hat{V}(\alpha)$ となる。すなわち、この問題は、入力レートの増大に対して獲得レートを最大にする様な分岐ルートの配分係数を決定する問題と等価である。

今、 $t = k$ におけるポテンシャル入力レートを $\hat{\alpha}_k$ と置く。この時、ポテンシャル入力レートが増大するものとすれば、 $t > k$ における増分は

$$\sum_{i=1}^N \phi_i [\hat{\alpha}_k - r] f_i(\varphi_i) \quad (5.29)$$

と表される。ここで r は、リジェクトされたトランザクションのレートを表す。簡単のために $r = 0$ と置くことにする。

(5.29)式に対する評価関数として、獲得レートを最大にする問題を考え、次式の様に定義する。

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \underset{\phi_i \in \Theta}{\text{Max}} E \left[\sum_{i=1}^N \hat{f}_i(\varphi_i) \right] \\ &= \underset{\phi_i \in \Theta}{\text{Max}} E \left[\sum_{i=1}^N \phi_i \alpha_k f_i(\varphi_i) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

と置と、(5.30)式は

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \underset{\phi_i \in \Theta}{\text{Max}} E \left[\sum_{i=1}^N \phi_i f_i(\varphi_i) \alpha_k \right] \\ &= \underset{\phi_i \in \Theta}{\text{Max}} E [\mathbf{f}(\theta) \alpha] \end{aligned} \quad (5.31)$$

と変形出来る。ただし、

$$\mathbf{f}(\theta) = \{f_i(\varphi_i) \phi_i; i = 1, 2, \dots, N\}$$

である。この時、獲得確率ベクトル $\mathbf{f}(\theta)$ の期待値と分散を次の様に表す。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{f}(\theta)] &= E \left[\sum_{i=1}^N f_i(\varphi_i) \phi_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^N g_i(\varphi_i) \phi_i \\ &\equiv \boldsymbol{\kappa} \end{aligned} \quad (5.32)$$

すなわち、ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ は、各ルートにおけるアクチュアル入力トランザクションのレート α_i に対する獲得確率の平均値

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &\equiv \{g_1(\varphi_1) \phi_1, \dots, g_N(\varphi_N) \phi_N\} \\ &= \{\overline{f_1(\varphi_1) \phi_1}, \overline{f_2(\varphi_2) \phi_2}, \dots, \overline{f_N(\varphi_N) \phi_N}\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

を表している。また、分散を

$$\text{Var}[\mathbf{f}(\theta)] = \sum_{i,j=1}^N \phi_i \phi_j \sigma_{ij} = \Sigma^2 \quad (5.34)$$

と定義すれば、ベクトル Σ は

$$\begin{aligned}\Sigma &\equiv [Var\{f_1(\varphi_1)\}, Var\{f_2(\varphi_2)\}, \dots, Var\{f_N(\varphi_N)\}] \\ &= [\sigma_{f_{1j}}, \sigma_{f_{2j}}, \dots, \sigma_{f_{Nj}}] \quad , j = 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (5.35)$$

と表される。

この時、 $\mathbf{f}(\phi)$ に関する、ある汎関数を $U[\mathbf{f}(\phi)]$ と定義し、(5.33)、(5.35)式を用いると、このシステムに対する平均・分散モデルとして(5.31)式を考慮すると

$$\hat{V}(\kappa, \Sigma^2) = E[U\{\mathbf{f}(\phi)\}] \quad (5.36)$$

と表すと、(5.36)式に対するラグランジェ関数は

$$\mathcal{E}[\phi, \lambda] = \hat{V}(\kappa, \Sigma^2) + \lambda \left[1 - \sum_{i=1}^N \phi_i \right] \quad (5.37)$$

と表せる。ここで、最適性の条件は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \phi_i} &= \hat{V}_\kappa \cdot \kappa_\phi + \hat{V}_{\Sigma^2} \cdot \Sigma^2_\phi + \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\lambda \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N \phi_i \right\} \right] \\ &= 0\end{aligned}\quad (5.38)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^N \phi_i = 0 \quad (5.39)$$

となる。それゆえ、(5.33)、(5.34)式を用いると(5.38)式は

$$\begin{aligned}\hat{V}_\kappa \cdot g_i(\bar{\varphi}_i) + 2\hat{V}_{\Sigma^2} \sigma_{ij} \phi_i + \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[\lambda \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N \phi_i \right\} \right] \\ = 0\end{aligned}\quad (5.40)$$

となる。ただし、以上の式において $\hat{V}(\cdot)$ は、添え字 (\cdot) に関する $\hat{V}(\cdot)$ の偏微分を表している。

この時、(5.36)式を用いて、 $U[\mathbf{f}(\phi)]$ を

$$U[\mathbf{f}(\phi)] = -\exp[-\eta \mathbf{f}] \quad (5.41)$$

と選ぶことにする。ただし、 $\eta > 0$ である。これは、 $\mathbf{f}(\theta)$ に対して単調増加でかつ、凹関数であり、題意に沿っているからである。さらに、 $\mathbf{f}(\phi)$ は正規分布に従うものと仮定すると簡単な確率積分の計算により、 $\hat{V}(\kappa, \Sigma^2)$ は

$$\begin{aligned}\hat{V}(\kappa, \Sigma^2) &= E[U(\mathbf{f})] \\ &= \exp\left[-\eta \kappa + \frac{1}{2}\eta^2 \Sigma^2\right]\end{aligned}\quad (5.42)$$

が得られる。それゆえ、(5.40)式より

$$\begin{aligned}\hat{V}_\kappa \cdot g_i(\varphi_i) + 2\hat{V}_{\Sigma^2} \sigma_{ii} \phi_i - \lambda &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (5.43)$$

が得られる。ただし、 $\sigma_{ij} = 0 (i \neq j)$ と置いた。

これより ϕ_i^* は、(5.43)式を用いると

$$\phi_i^* = \frac{\lambda \sigma_{ii}^{-1} - \hat{V}_\kappa f_i(\varphi_i) \sigma_{ii}^{-1}}{2\hat{V}_{\Sigma^2}} \quad (5.44)$$

が得られる。ここで、(5.44)式の両辺を i について和をとり、(5.39)式の条件を満足すると、 λ に関して

$$\lambda = \frac{2\hat{V}_{\Sigma^2}}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ii}^{-1}} + \frac{\hat{V}_\kappa \sum_{i=1}^N f_i(\varphi_i) \sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ii}^{-1}} \quad (5.45)$$

が得られる。ただし、 $\sigma_{ij} = 0 (i \neq j)$ と置いた【付録 G 参照】。

さらに、(5.45)式を(5.44)式に代入すると

$$\begin{aligned}\phi_i^* &= \frac{\sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ii}^{-1}} - \frac{1}{2} \frac{\hat{V}_\kappa}{\hat{V}_{\Sigma^2}} \cdot (\sigma_{ii}^{-1}) \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N g_i(\varphi_i) \sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ii}^{-1}} - g_i(\varphi_i) \right\} \\ &= \frac{\sigma_{ii}^{-1}}{\sum_{i=1}^N \sigma_{ii}^{-1}} \left[1 - \frac{1}{\eta} \left\{ \sum_{i=1}^N g_i(\varphi_i) \sigma_{ii}^{-1} - g_i(\varphi_i) \sum_{i=1}^N \sigma_{ii}^{-1} \right\} \right] \\ i &= 1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (5.46)$$

ただし、 $\frac{\hat{V}_\kappa}{2\hat{V}_{\Sigma^2}} = \frac{1}{\eta}$ と置いた。

この時、仮に N 個のルートの統計的性質が同じなら、(5.46)式より

$$\begin{aligned}\phi_i^* &= \frac{1}{N} - \frac{1}{2} \frac{\hat{V}_\kappa}{\hat{V}_{\Sigma^2}} \cdot (\sigma_{ii}^{-1}) \left\{ \frac{N f_i(\varphi_i) \sigma_{ii}^{-1}}{N \sigma_{ii}^{-1}} - f_i(\varphi_i) \right\} \\ &= \frac{1}{N}\end{aligned}\quad (5.47)$$

となり，入力レートは各ルートに等分配される。以上の様に，平均・分散モデルによれば，最適配分係数は，(5.46)式の様に求まる。

次に，各ルートにおけるレート α に対する定常ロス確率を次の様に定義する。

$$\begin{aligned}P &= P\{q(\alpha) < \tau\} \\ &= 1 - \int_0^\infty \int_0^t h_q(q) h_\tau(t) dq dt \\ &= 1 - \int_0^\infty H_q(t) h_\tau(t) dt\end{aligned}\quad (5.48)$$

ここで， $H_q(t)$ は，Queuing Time の分布関数， $h_\tau(t)$ は Dead Line τ の確率密度関数であり，指数分布を持つものとする。いま， α はポアソン分布のレートであり， μ は分岐ルートのサービスレートであり，指数分布とする。さらに， γ は Dead-Line のレートとして表すと， $H_q(t)$ は

$$H_q(t) = 1 - (\alpha - C^* / \mu) \exp[-(\mu - \alpha + C^*)t] \quad (5.49)$$

又， $h_\tau(t)$ は

$$h_\tau(t) = \gamma \exp(-\gamma t) \quad (5.50)$$

と表せる。

それゆえ，(5.49)，(5.50)式を(5.48)式に代入すると

$$\begin{aligned}P &= 1 - \int_0^\infty \{1 - (\alpha - C^* / \mu) \exp[-(\mu - \alpha + C^*)t] \\ &\quad \times \gamma \exp(-\gamma t)\} dt \\ &= (\alpha - C^*) \gamma / \{\mu(\mu - \alpha + C^* + \gamma)\}, \alpha < \mu\end{aligned}\quad (5.51)$$

が得られる。ただし，以上の展開の中で添え字 i は省略している。

ゆえに，獲得確率は(5.9)式を用いると

$$\begin{aligned}
 f_i(\varphi_i) &= \{1 - P_i(\varphi_i)\} \\
 &= \left[1 - \frac{(\alpha_i - C_i^*)\gamma}{\mu_i(\mu_i - \alpha_i + C_i^* + \gamma)} \right] \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

が得られる。

すなわち，(5.52)式は，各ルートの獲得確率を表している。それゆえ， $t = k$ における分岐ルートの平均値を $\bar{\alpha}_i^k$ と置くと，(5.52)式に従えば， $\overline{f_i(\bar{\varphi}_i^k)} = f_i(\bar{\varphi}_i^k)$ と置くことにより

$$f_i(\bar{\varphi}_i^k) = \left[1 - \frac{(\bar{\alpha}_i^k - C_i^*)\gamma}{\mu_i(\mu_i - \alpha_i + C_i^* + \gamma)} \right] \quad (5.53)$$

として， $t = k$ における $f_i(\alpha_i)$ の平均値が計算できる。

これより，(5.46)式を用いれば，

$$\begin{aligned}
 \phi_i^* &= \frac{\langle \sigma_{ii}^{-1} \rangle_k}{\sum_{i=1}^N \langle \sigma_{ii}^{-1} \rangle_k} \\
 &\quad \left[1 - \frac{1}{\eta} \left\{ \sum_{i=1}^N g_i(\varphi_i) \langle \sigma_{ii}^{-1} \rangle_k - g_i(\varphi_i) \sum_{i=1}^N \langle \sigma_{ii}^{-1} \rangle_k \right\} \right] \quad (5.54) \\
 i &= 1, 2, \dots, N
 \end{aligned}$$

の様に最適配分係数が求められる。ただし， $\langle \sigma_{ii}^{-1} \rangle_k$ は $t = k$ における $g_i(\varphi_i)$ の分散を表している【付録 G 参照】。

以上の様に，定常モデルとして平均・分散モデルを考えた時，最適配分係数は図 5.2 のルーチンにより求めることが出来る。

5.3 数値計算例

図 5.3 は，2 経路時の入力トランザクション α に対する配分係数である。

(例 1) 2 経路の例

$$\mu_1=20, \mu_2=10$$

$$C_1/\alpha_1=0.1, C_2/\alpha_2=0.2$$

$$\phi_1 \text{ 初期値}=0.5, \phi_2 \text{ 初期値}=0.5$$

$$\eta=0.00001, \gamma=0.001$$

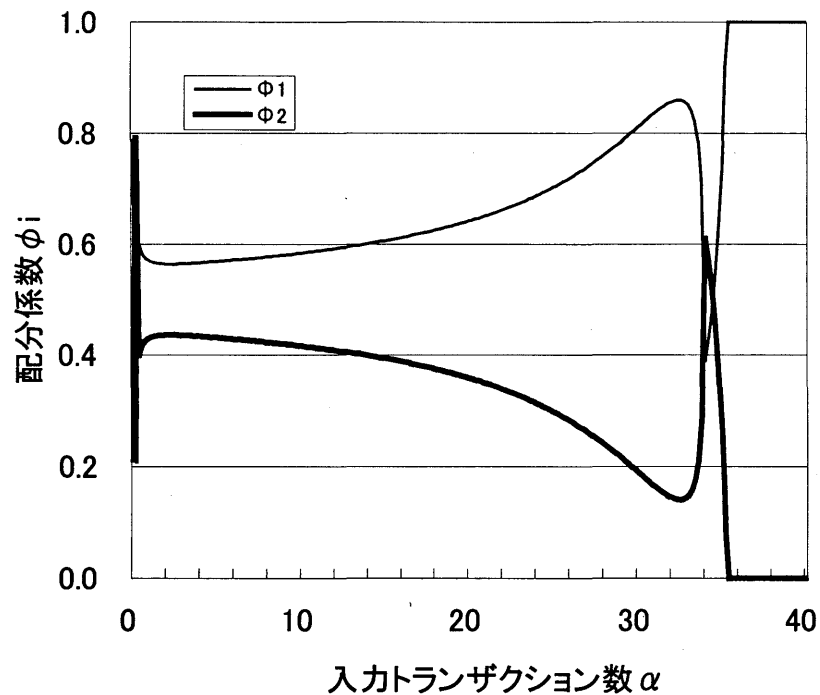


図 5.3 2 経路時の配分係数

Figure 5.3 The transaction portfolio parameter in case of two routes

図 5.4 は、2 経路時の入力トランザクション α に対する獲得確率及びシステムからの出力トランザクション数である。図 5.3 及び図 5.4 より獲得確率に対応した配分係数に変化している。決定された配分係数により、出力トランザクションが増加していることが確認できる。

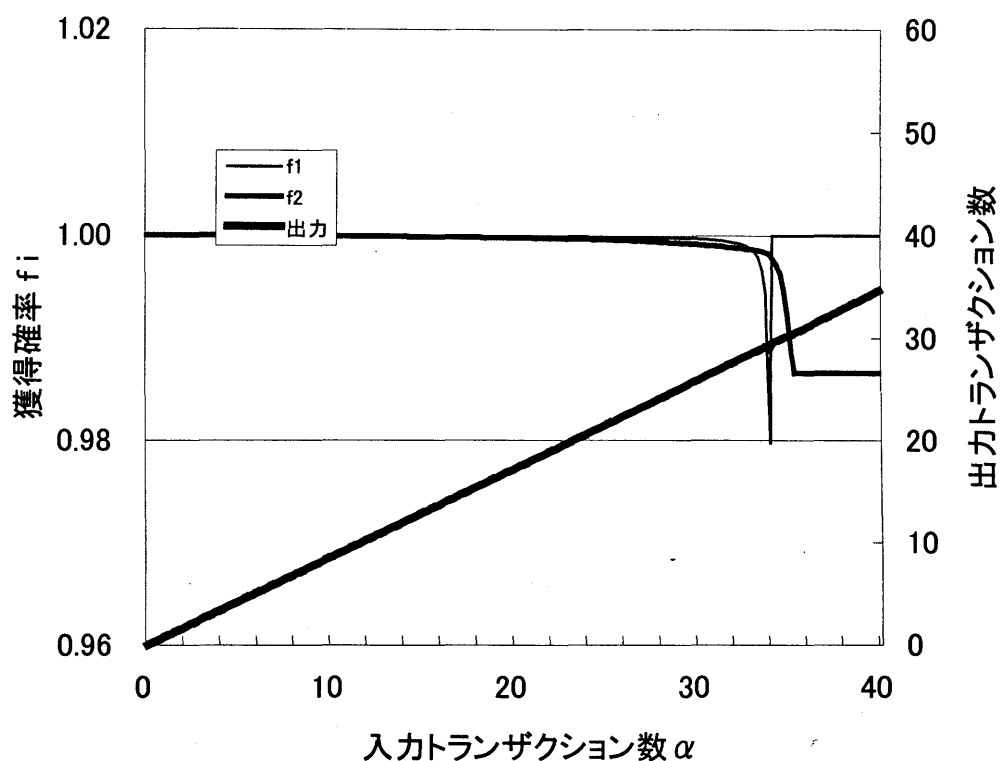


図 5.4 2 経路時の獲得確率及び出力トランザクション数
Figure5.4 The probability of customer profit and the number of output transaction in case of two routes

図 5.5 は、3 経路時の入力トランザクション α に対する配分係数である。

(例 2) 3 経路の例

$$\mu_1=20, \mu_2=10, \mu_3=5$$

$$C_1/\alpha_1=0.05, C_2/\alpha_2=0.1, C_3/\alpha_3=0.2$$

ϕ_1 初期値=0.33333333

ϕ_2 初期値=0.33333333

ϕ_3 初期値=0.33333334

$\eta=0.000001$, $\gamma=0.0001$

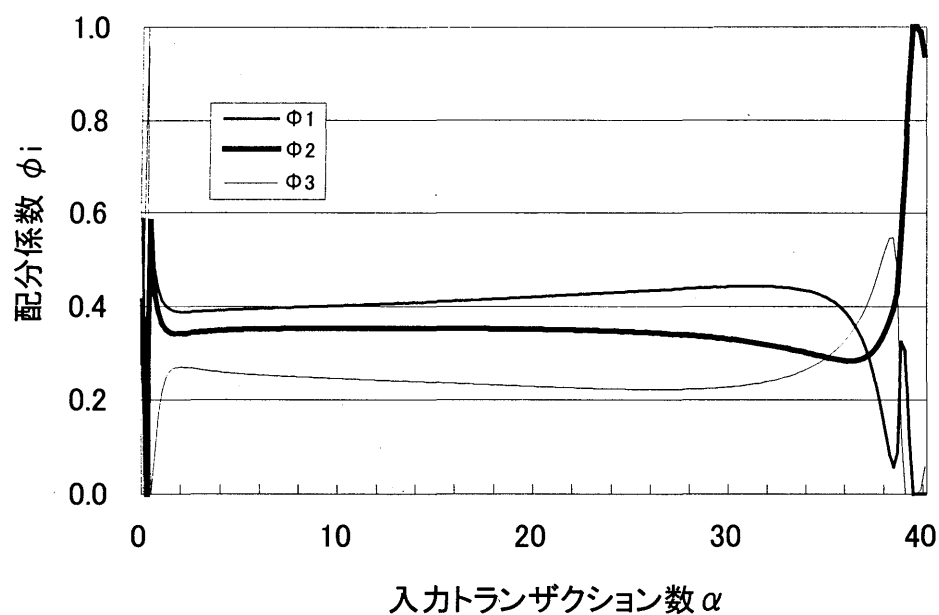


図 5.5 3 経路時の配分係数

Figure5.5 The transaction portfolio parameter in case of three routes

図 5.6 は、3 経路時の入力トランザクション α に対する獲得確率及びシステムからの出力トランザクション数である。図 5.5 及び図 5.6 より獲得確率に対応した配分係数に変化している。決定された配分係数により、出力トランザクションが増加していることが確認できる。

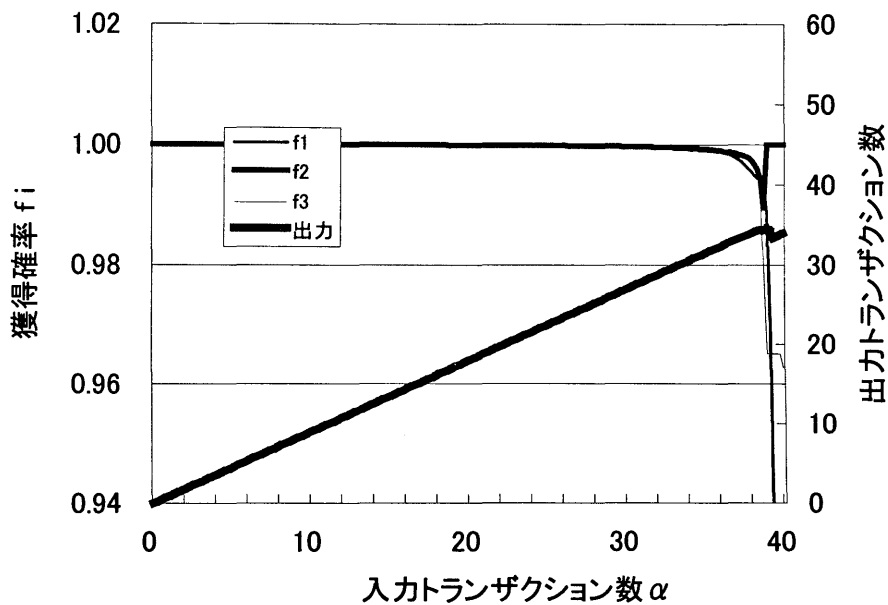


図 5.6 3 経路時の獲得確率及び出力トランザクション数
Figure 5.6 The probability of customer profit and the number of output transaction in case of three routes

5.4 まとめ

本章では、 N 個の $M/M/1$ 型待ち行列系が並列に存在するシステムに対して、各ルートでのトランザクション消滅および各ルート固有の問題によるトランザクション損失をロス確率と定義することにより最適配分問題を考察した。本章では、トランザクション獲得確率及びそのレートを定義し、獲得レートの最大問題を定式化し、あるコ

スト関数のもとで各分岐レートの動的配分係数を決定した結果、配分係数の最適値は、獲得レートの確率的性質にのみ依存することを明らかにした。

その結果、本章では、評価関数に依存しない様に評価関数の時間項に関する独立を仮定すれば、最適配分係数が厳密な形で求められた。

同様の問題に対して、定常最適問題を定式化した結果、獲得確率の平均及び分散をパラメータとして持つ最適配分係数の厳密な解を求めた。

最後に、数値計算をした結果、本研究により求められた最適配分係数の有用性を確かめた。

参考文献

- [1] 宮武信春:「ファイナンス理論のなかの最適制御則」 計測と制御, vol.30, No. 7, pp. 616-622, 1991年7月
- [2] 森村英典・木島正明:「ファイナンスのための確率過程」 pp. 117-140, 日科技連, 1995年4月
- [3] 沢木勝茂:「ファイナンス数理」 pp. 87-143, 朝倉書店, 1994年12月
- [4] JUDD, K. L., and PETERSEN, B. C., "Dynamic Limit Pricing and Internal Finance", Journal of Economic Theory, vol. 39, pp. 369-399, 1986.
- [5] 砂原善文:「確率システム理論」 pp.72-79, (社)電子情報通信学会, 1994年3月
- [6] 白井・天野・井上:「トランザクション消滅のある待ち行列系の最適配分法ーファイナンス論的アプローチー」 電気学会論文誌, Vol.120-C, 2000年4
- [7] M.H. KALLMES and C.G. CASSANDRAS, "Two approaches to optimal routing and admission control in systems with real-time traffic", J. of Optimization Theory and Applications: vol. 84, No. 2, pp. 311-338, Feb. 1995.
- [8] LAWRENCE M. WEIN, "Optimal control of a two-station brownian network", Mathematics of operations research, vol. 15, No. 2. pp. 215-242, May, 1990.

第 6 章

結論

本論文では、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系の定常解析において、入出力過程及びトランザクション消滅過程を各々独立したポアソン過程であると仮定した上で、システムの定常確率分布(幾何分布)を求め、その唯一存在条件も併せて求めた。その結果、本システムに与える要因は、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響する事を明らかにした。

つぎに、トランザクション消滅を有限個と限定した場合のモデル化にジャンプ型確率微分方程式を導入した。本システムに与える要因は、有限個のトランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響する事を明らかにした。有限個のトランザクション消滅を考慮したシステム処理時間は、より現実のシステムを設計するための有力な結果を示したといえる。

さらに、システムの収益に着目して、ファイナンス理論におけるポートフォリオの考え方を活用することにより、収益最大問題における最適解が存在する条件を求めた。

最後に、 N 個の $M/M/1$ 型待ち行列系が並列に存在するシステムに対して、あるコスト関数のもとで各分岐レートの最適な動的配分係数を決定した。最適配分係数は、獲得レートの確率的性質にのみ依存する事も明らかにした。同様の問題に対して、定常最適問題を定式化した結果、獲得確率の平均及び分散をパラメータとして持つ最適配分係数の厳密な解を求めた。

第 2 章では、トランザクション消滅のあるシステムの定常状態において、トランザクション消滅がシステムにどのような影響を与えるかについて論じた。確率過程における点過程論をベースに、計数過程を活用して、入出力過程及びトランザクション消滅過程を各々独立したポアソン過程であると仮定した上で、システム定常確率分布(幾何分布)を求め、その唯一存在条件も併せて求めた。

さらに、この定常分布を利用する事により、入力されたトランザクションの定常滞留

時間(システム滞留時間)をリトルの公式を応用して求めた。その結果、本システム性能に与える要因は、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響する事を明らかにした。

第 3 章では、有限個のトランザクション消滅をモデル化した方法としてジャンプ型確率微分方程式を導入した。定常状態における有限個のトランザクション消滅が、システムにどのような影響を与えるかについて解析した。

第 2 章と同様に、本システム性能に与える要因は、トランザクション消費に費やされる時間が最も大きく影響する事を明らかにした。ただし、現実のシステムにおいては、トランザクション消費が有限個である以上、有限個のトランザクション消滅を考慮したシステム処理時間は、システム設計のための有力な結果を示した。

第 4 章では、ファイナンス理論におけるポートフォリオの考え方を活用することにより、システムがもたらす収益に関して、収益の最大化における最適解が存在する条件を求める事が出来た。この時、制御変数として収益率を選んだ事の意味は、システム維持・管理の評価として待ち行列系に対応するシステムにどれだけ収益をもたらすかが、企業にとって見れば最終的な評価に繋がるからである。さらに、最適問題を考慮する上で、本研究で取り扱っている様なシステムのパイプライン容量を拘束条件として認識しておけば良い事になる。また、ファイナンスには、投資配分率が「負」という値を取り得るが、本システムでは、投資配分率が「負」という値を取り得ない。この点が、ファイナンスと待ち行列系との違いがある事も明らかになった。

今後の課題としては、自設備に入力される製造部品等の入力レートと自設備内に存在するトランザクション消滅レートの両方を制御する事により、自設備そのものに製造許容制限がある場合、自設備に入庫される製造部品等の入庫状況をも含めたシステムの「製造流通収益最大化」という課題が残されている。

第 5 章では、 N 個の $M/M/1$ 型待ち行列系が並列に存在するシステムに対して、評価関数に依存しない様に評価関数の時間項に関する独立性を仮定すれば、最適配分係数

が厳密な形で求められた。同様の問題に対して、定常最適問題を定式化した結果、獲得確率の平均及び分散をパラメータとして持つ最適配分係数の厳密な解を求めた。この獲得確率の変動が伊藤型確率微分方程式に従うものとすれば、ある適当な評価汎関数のもとで最適配分係数は、獲得確率(ロス確率)の確率的性質にのみ依存する事を明らかにした。

今後の課題としては、本システムに関して、提案した伊藤型確率微分方程式の「非定常状態」において、モデル式のパラメータ値を決める問題が残されている。

以上、本論文では、トランザクション消滅を考慮した待ち行列系においては、システムに与える要因として、トランザクション消滅に費やされる時間が最も大きく影響する事を明らかにした。また、トランザクション消滅に費やされる時間が、システム全体の収益にどう影響を与えるか、ファイナンス理論におけるポートフォリオの考え方を活用することにより、システムがもたらす収益に関して、収益の最大化における最適解が存在する条件を求めた。さらに、 N 個の $M/M/1$ 型並列待ち行列系に対して、獲得確率の変動が伊藤型確率微分方程式に従うものとすれば、ある適当な評価汎関数のもとで最適配分係数が厳密な形で求められた。また、定常最適問題においても、獲得確率の平均及び分散をパラメータとして持つ最適配分係数の厳密な解を求めた。かつ、最適配分係数は獲得確率(ロス確率)の確率的性質にのみ依存する事も明らかにした。

今後、工学的システムのモデル化には、点過程、計数過程をもとにマルチンゲールを活用する事が有力である。さらに、最適制御に関して、ファイナンス理論が積極的に活用される事で、様々な問題が解決されるであろう。

付録

【付録 A】

(2.21)式で定義した $Z_t(n)$ に関して以下の式が成り立つ。

$$Z_t(n) = Z_t(0) + \sum_{0 \leq s < t} (Z_t(n) - Z_{s-}(n)) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{0 \leq s < t} (Z_s(n) - Z_{s-}(n))(\Delta \hat{A}_s - \Delta C_s) \\ &+ \sum_{0 \leq s < t} (Z_s(n) - Z_{s-}(n))\Delta A_s \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t (Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - Z_{s-}(n)) (d\hat{A}_s - dC_s) \\ &+ \int_0^t (Z_{s-}(n+1) - Z_{s-}(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}) dA_s \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} &= Z_0(n) \\ &+ \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \hat{\alpha}(t) ds \\ &- \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) > 0\}} C^*(s) ds \\ &+ \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}\} \alpha(s) ds + m(t) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

(A.3)式から(A.4)式への展開にマルチンゲール理論を適用している。

【付録 B】

$$\begin{aligned}
 & E\left[\int_0^t \{Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - Z_s(n)\}(\hat{\alpha}(s) - C^*(s))ds\right] \\
 &= \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - P_s(n)\} \\
 & \quad E[\hat{\alpha}(s) - C^*(s)]ds
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

となる。次に、第 3 項は

$$\begin{aligned}
 & E\left[\int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} \alpha(s)ds\right] \\
 &= \int_0^t \{P_s(n+1) - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} E[\alpha(s)]ds
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

となる。ゆえに、(2.26)式の $E(\cdot)$ を実行すると

$$\begin{aligned}
 & P_t(n) = P_t(0) \\
 & + \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - P_s(n)\} E[\hat{\alpha}(s) - C^*(s)]ds \\
 & + \int_0^t \{P_s(n+1) - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} E[\alpha(s)]ds
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

が得られる。次に、 $\{\hat{A}(t)\}, \{A(t)\}, \{C(t)\}$ の各レート $\{\hat{\alpha}\}, \{\alpha\}, \{C^*\}$ が、ある非負の $E[\phi_{\hat{\alpha}}] < \infty$, $E[\phi_{\alpha}] < \infty$, $E[\phi_C] < \infty$ を満たす確率変数 $\phi_{\hat{\alpha}}$, ϕ_{α} , ϕ_C によって、 $\hat{\alpha} \leq \phi_{\hat{\alpha}}$, $\alpha \leq \phi_{\alpha}$, $C^* \leq \phi_C$, 但し、 $t \geq 0$ を満たすなら定常性から余り離れないと仮定する。よって、(B.3)式に微分演算を実行すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt}[P_t(n)] = \frac{d}{dt}[P_t(0)] \\
 & + \frac{d}{dt} \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - P_s(n)\} E[\hat{\alpha}(s) - C^*(s)]ds \\
 & + \frac{d}{dt} \int_0^t \{P_s(n+1) - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} E[\alpha(s)]ds
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

となる。ここで、(2.19)式に関して

$$E[C(t)] = k_c(t) \equiv C^*(const.) \tag{B.5}$$

とおく。(B.5)式を用いると(B.4)式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[P_t(n)] = & \{P_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - P_t(n)\}(\hat{\alpha} - C^*) \\ & + \{P_t(n+1) - P_t(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\}\alpha \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

が得られる。

【付録 C】

(3.17)式で定義した $Z_t(n)$ に関して以下の式が成り立つ。

$$Z_t(n) = Z_t(0) + \sum_{0 \leq s < t} (Z_t(n) - Z_{s-}(n)) \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{0 \leq s < t} (Z_s(n) - Z_{s-}(n))(\Delta \hat{A}_s - \Delta C_s) \\ &+ \sum_{0 \leq s < t} (Z_s(n) - Z_{s-}(n))\Delta A_s \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t (Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - Z_{s-}(n)) (d\hat{A}_s - dC_s) \\ &+ \int_0^t (Z_{s-}(n+1) - Z_{s-}(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}) dA_s \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$= Z_0(n)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \hat{\alpha}(t) ds \\ &- \sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(s) ds \\ &+ \int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}\} \alpha(s) ds + m(t) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

(C.3)式から(C.4)式への展開にマルチンゲール理論を適用している。

【付録 D】

(3.22)式右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^t \{Z_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - Z_s(n)\} \hat{\alpha}(s) ds\right] \\ &= \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - P_s(n)\} E[\hat{\alpha}(s)] ds \end{aligned}$$

右辺第 3 項において

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{i=1}^k \int_0^t \{Z_s(n-1) - Z_s(n)\} \cdot \mathbf{1}_{\{Q(s^-) \geq i\}} C^*(s) ds\right] \\ &= \sum_{i=1}^k \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n-1 \geq i)} - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n \geq i)}\} E[C^*(s)] ds \\ &= \sum_{i=1}^k \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n-1 \geq i)} - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n \geq i)}\} E[C^*(s)] ds \\ &= \int_0^t \{\inf(n-1, k) P_s(n-1) - \inf(n, k) P_s(n)\} E[C^*(s)] ds \end{aligned} \tag{D.1}$$

となる。次に、第 4 項は

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^t \{Z_s(n+1) - Z_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} \alpha(s) ds\right] \\ &= \int_0^t \{P_s(n+1) - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n)0}\} E[\alpha(s)] ds \end{aligned} \tag{D.2}$$

となる。第 5 項はマルチンゲールだから、期待値 $E[m(t)] = 0$ である。

ゆえに、(3.22)式の $E(\cdot)$ を実行すると

$$\begin{aligned} & P_t(n) = P_t(0) \\ & + \int_0^t \{P_s(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n)0} - P_s(n)\} E[\hat{\alpha}(s)] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \{ \inf(n-1, k) P_s(n-1) - \inf(n, k) P_s(n) E[C^*(s)] \} ds \\
& + \int_0^t \{ P_s(n+1) - P_s(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} \} E[\alpha(s)] ds
\end{aligned}
\tag{D.3}$$

が得られる。次に、 $\{\hat{A}(t)\}, \{A(t)\}, \{C(t)\}$ の各定常レート $\{\hat{\alpha}\}, \{\alpha\}, \{C^*\}$ が、ある非負の $E[\phi_{\hat{\alpha}}] < \infty$, $E[\phi_{\alpha}] < \infty$, $E[\phi_c] < \infty$ を満たす確率変数 $\phi_{\hat{\alpha}}$, ϕ_{α} , ϕ_c によって、 $\hat{\alpha} \leq \phi_{\hat{\alpha}}$, $\alpha \leq \phi_{\alpha}$, $c \leq \phi_c$, 但し、 $t \geq 0$ を満たすなら定常性から余り離れないと仮定する。よって、(D.3)式に微分演算を実行すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[P_t(n)] = & \\
& + (P_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} - P_t(n)) \hat{\alpha} \\
& - C^* \cdot \inf(n, k) P_t(n-1) + C^* \cdot \inf(n, k) P_t(n) \\
& + \{P_t(n+1) - P_t(n) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)}\} \alpha
\end{aligned}
\tag{D.4}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[P_t(n)] = & - [\alpha \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} + \{\hat{\alpha} - C^* \cdot \inf(n, k)\}] P_t(n) \\
& + [\hat{\alpha} - C^* \cdot \inf(n, k)] P_t(n-1) \cdot \mathbf{1}_{(n>0)} \\
& + \alpha P_t(n+1)
\end{aligned}
\tag{D.5}$$

が得られる。

【付録 E】

$$E_x \int_0^\infty e^{-rt} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) dP_i(t) \quad (\text{E.1})$$

に対して、収益率 $\{P_i(t)\}$ のレート を $\{p_i(t)\}$ と表すと e^{-rt} の様な右連続な関数に対して

$$\begin{aligned} E_x \int_0^\infty e^{-rt} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) dP_i(t) \\ = E_x \int_0^\infty e^{-rt} \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(t) W(t^-) \lambda_i^B(W(t)) dt \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

が定義できる[4]。

それゆえ、(E.2)式を用いれば(4.20)式が得られる。

【付録 F】

一般に、消滅確率(ロス確率)が

$$\begin{aligned} P[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] \\ = 1 - \int_0^t H_q(t) h_\tau(t) dt \end{aligned} \quad (F.1)$$

と表されるものとする、獲得確率は

$$\begin{aligned} f[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] \\ = \int_0^t H_q(t) h_\tau(t) dt \end{aligned} \quad (F.2)$$

と表せる。ここで、 $H_q(t)$ は、Queuing Time の分布関数、 $h_\tau(t)$ は、dead time の確率密度関数である。 $\alpha(t^-)$ は、 $t = t^-$ 時の $\alpha(t)$ の値、 μ は分岐ルートのサービスレート、 γ は、dead time のレートを表す。ここで、(F.2)式を一般に

$$\begin{aligned} f[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] \\ = \int_0^t \Phi[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] dt \end{aligned} \quad (F.3)$$

と表す時、各種パラメータの確率変動による確率積分を確率過程 $f_s[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t]$ に対して

$$\begin{aligned} f_s[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] - f_s[\mu_0, \gamma_0, \alpha(t^-), 0] \\ = \int_\tau^t \Phi[\mu, \gamma, \alpha(\tau^-), \tau] dZ(\tau) \\ = \int_\tau^t \Phi[\mu, \gamma, \alpha(\tau^-), \tau] d\tau + \int_\tau^t b(\tau) dZ(\tau) \end{aligned} \quad (F.4)$$

と表す時、確率過程 $f_s[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t]$ は

$$\begin{aligned} df_s[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] \\ = a[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] dt + b(t) dZ(t) \end{aligned} \quad (F.5)$$

の様な確率微分方程式で表すことが出来るものとする。ただし、 $Z(t)$ はウィナー過程である。

ここで、作用素の $a[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t]$ に関しては、

【I】:

$$\begin{aligned} |a[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] - a[\mu', \gamma', \alpha(t^-), t]| \\ \leq K \left| [\mu, \gamma, \alpha(t^-)] - [\mu', \gamma', \alpha(t^-)] \right| \end{aligned} \quad (F.6)$$

【II】:

$$\left| a[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] \right|^2 \leq K^2 \left(1 + \left| [\mu, \gamma, \alpha(t^-)] \right|^2 \right) \quad (\text{F.7})$$

ただし, K は定数である。

が成立するものとする。以上の様な仮定のもとで(F.5)式は, 伊藤型確率微分方程式となる。さらに, (5.10)式の動的モデル

$$d\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) \alpha(t^-) df_{(s)i}[\mu, \gamma, \alpha(t^-), t] \quad (\text{F.8})$$

において原式は

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(t) \alpha(t^-) f_{(s)i}[\cdot] \quad (\text{F.9})$$

と表される。

この時, $\alpha(t)$ はポアソン過程のレートであるから F_t^N を $\{A(t) | 0 \leq \tau \leq t\}$ により生成された σ -加法族とする。この時, $\{A(t)\}$ は, F_t^N に適合する確率過程であり

$$M(t) = A(t) - \alpha(t^-) \int_0^t f_{(s)}[\cdot] d\tau \quad (\text{F.10})$$

によりマルチンゲールを定義する。

ここで, $f_{(s)}[\cdot]$ は, (F.5)式の解過程である。さらに, $\{A(t)\}$ はポアソン過程であるから

$$\begin{aligned} E(A(t) - A(\tau) | F_t^N) &= E(A(t) - A(\tau)) \\ &= \int_\tau^t \alpha(\tau^-) f[\cdot] d\tau \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

となる。これより

$$\begin{aligned} E(M(t) | F_t^N) &= E(A(t) - A(\tau) + A(\tau) | F_t^N) \\ &\quad - \int_0^t \alpha(\tau^-) f[\cdot] d\tau \\ &= A(\tau) + \int_\tau^t \alpha(\tau^-) f[\cdot] d\tau \\ &\quad - \int_0^t \alpha(t^-) f[\cdot] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(\tau) - \int_0^\tau \alpha(\tau^-) f[\cdot] d\tau \\
&= A(\tau) - \alpha(\tau^-) \int_0^\tau f[\cdot] d\tau
\end{aligned} \tag{F.12}$$

が成り立つ。このことは、(F.5)式の伊藤型確率微分方程式の解過程は連続であることから判る。

以上の様に(F.12)式によれば、 $\{M(t)\}$ は F_t^N に適合したマルチンゲールであることが判る。すなわち、(F.9)式の両辺はポアソン過程のレートを表していることになる。

【付録 G】

本論において(5.45), (5.54)式は, 各ルートの獲得確率ベクトルの共分散 $\sigma_{ij} (i \neq j)$ を無視したが, これを考慮すると先ず(5.45)式は

$$\Phi^* = \frac{1}{\eta} [\Sigma]^{-1} \cdot \{F(a) - [F_0(a_0)]\} \quad (G.1)$$

と表せる。ただし, 各ベクトルは

$$\Phi^* = col\{\phi_1^*, \phi_2^*, \dots, \phi_N^*\} \quad (G.2)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \quad (G.3)$$

$$[F(a)] \equiv col\{f_1(\varphi_1), f_2(\varphi_2), \dots, f_N(\varphi_N)\} \quad (G.4)$$

$$[F_0(a_0)] \equiv col\{f_0(\varphi_0), f_0(\varphi_0), \dots, f_0(\varphi_0)\} \quad (G.5)$$

次に, (5.54)式は,

$$\Phi^* = \frac{[\Sigma]^{-1}}{\det[\Sigma]^{-1}} - \frac{1}{\eta} [\Sigma]^{-1} \left\{ \frac{[F(a)] \cdot [\Sigma]^{-1}}{\det[\Sigma]^{-1}} - [F(a)] \right\} \quad (G.6)$$

と表される。ただし, $\det[\Sigma]^{-1}$ はマトリックス $[\Sigma]^{-1}$ のマトリックス演算を表している。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、懇切丁寧なるご指導ならびにご助言を頂いた立命館大学理工学部情報学科亀井且右教授に心から感謝致します。また、有益なるご助言を戴いた立命館大学理工学部情報学科、山田喬彦教授、房岡 暲教授に深く感謝致します。

本研究は、筆者が株式会社情報工房在籍中に行ったものであり、研究の機会を与えて頂いた、株式会社情報工房中野晴充会長に感謝致します。本研究を遂行するにあたっては、株式会社京南エレクトクス天野佳則博士（現在、専務取締役）に多大なる御助言、御指導を頂くとともに、熱心に議論して頂きました。ここに深く感謝致します。また、社団法人日本オペレーションリサーチ学会 OR 研究会では、東京電機大学理工学部情報学科町原文明教授に深い理解と有益かつ実証的な討論をして頂きました。深く感謝致します。

また、第 2 章において、理論検証のためのシミュレーションモデル作成については、株式会社情報工房宇都宮陽一担当部長に協力して頂きました。ならびに、株式会社情報工房社員の方々に活発な議論をして頂きました。改めて皆様に感謝致します。

立命館大学大学院在学中から現在に至るまでの 20 年以上もの間、公私にわたり暖かいご指導を戴いている立命館大学理工学部情報学科井上和夫教授に心から感謝致します。

最後に、本論文作成にあたっていろいろと協力してくれた家族に感謝の意を表します。

研究業績

本論文に関わる発表文献

論文

1. 白井・天野・井上:「トランザクション消滅のあるシステムの定常解析」電気学会論文誌, Vol.118-C, 1998 年 10 月
2. 白井・天野・井上:「ファイナンス論的評価による待ち行列系最適制御ー収益レートに対する最適性の条件ー」電気学会論文誌, Vol.120-C, 2000 年 4
3. 白井・天野・井上:「トランザクション消滅のある待ち行列系の最適配分法ーファイナンス論的アプローチー」電気学会論文誌, Vol.120-C, 2000 年 4
4. 白井・天野・井上:「有限個のトランザクション消滅を考慮したシステムの定常解析ートランザクション消滅過程の定常系内処理時間について」電気学会論文誌, 2000 年 10 月掲載予定

国内学会

1. 白井・天野・井上:「衝突を考慮した C/S 型ネットワークのジャンプ型確率微分方程式を用いたモデル化」電気関係学会関西支部連合大会, 1996 年 11 月
2. 白井・天野・井上:「フレーム衝突を含む一般化 C/S 型ネットワークのモデル化および定常分布」電子情報通信学会春季全国大会講演論文集, 1997 年 3 月
3. 白井・天野・井上:「C/S 型ネットワークシステム最適評価関数について」電子情

報通信学会秋季全国大会講演論文集，1997 年 9 月

関連文献

1. K. SHIRAI, Y. AMANO and K. INOUE “Stochastic modeling and stationary distributions for the C/S type network with collision by using jump process”,
Memories of Institute of Science and Engineering Ritsumeikan University,
Shiga, Japan, No. 55, 1996